Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p

Rachel Ollivier

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université de Paris 7-Denis Diderot

Résumé

Soient p un nombre premier et F un corps p-adique. Parmi les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F)$ ayant un caractère central, L.Barthel et R.Livné ont classifié les sous-quotients d'induites paraboliques et montré qu'il en existe d'autres, qu'ils n'ont pas classifiées et qu'ils ont appelées *supersingulières* (Barthel, Livné, 1994, 1995). En 2001, C.Breuil a obtenu la classification de ces dernières, dans le cas particulier où $F = \mathbb{Q}_p$ (Breuil). Pour $n \geq 3$, on ne connaît pas même la classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ qui sont des sous-quotients d'induites paraboliques. Nous nous intéressons ici au cas des séries principales.

Le cadre de la caractéristique p fait jouer un rôle particulier à l'unique pro-p-Sylow du sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$: toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse non nulle de $\mathrm{GL}_n(F)$ possède un vecteur non trivial fixé par ce pro-p-Iwahori. Il est ainsi naturel d'approcher les représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(F)$ *via* l'étude des modules sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$. Les travaux de M.-F.Vignéras sur la structure de cette algèbre ont permis de définir ses *modules standards* (Vignéras, 2005).

A l'aide des modules standards dits *réguliers*, nous étudions l'espace des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori des séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p. Nous en déduisons un critère d'irréductibilité pour ces séries principales.

Key words:
anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$, modules standards, entrelacements

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel à q éléments. Soit $n \geq 1$. Notons $I(1)$ le pro-p-Iwahori standard du groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(F)$. L'espace des $I(1)$-invariants d'une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation lisse de $\mathrm{GL}_n(F)$ possède une structure naturelle de module à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ du pro-p-Iwahori.

Nous rappelons à la section 2 les résultats relatifs à la structure de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ (Vignéras, 2005). Elle possède une présentation analogue à la présentation de Iwahori-Matsumoto pour la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke-Iwahori, ainsi qu'une présentation dite *de Bernstein entière* inspirée de la présentation de Bernstein pour l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe : on dispose dans la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori d'un sous-anneau commutatif $\mathcal{A}^{(1)}$, contenant le centre, et sur lequel la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke est un module de type fini.

Soit R un anneau commutatif unitaire. Nous donnons à la section 3 la définition et les propriétés des R-modules standards, c'est-à-dire des $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules induits par les R-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$. Ils possèdent la propriété universelle suivante : si R est un corps algébriquement clos, tout $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un R-module standard. Si de plus q est inversible dans R, la R-algèbre $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ est un module libre de rang $n!$ sur sa sous-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ et les R-modules standards sont de dimension $n!$.
On classe les $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules standards en trois familles : on dit d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$, du $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard qu'il induit, et de tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module quotient de ce module standard, qu'ils sont *supersinguliers* si le caractère est “aussi nul que possible”, au sens de la définition 2. Dans le cas opposé, où le caractère est “le moins nul possible”, on dira qu'ils sont *réguliers*. Le cas intermédiaire sera appelé *singulier*. Cette définition suppose implicitement que l'on puisse identifier les $I(1)$-invariants de sous-quotients d'induites paraboliques avec des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules non-supersinguliers. C'est le cas pour $n = 2$ (Vignéras, 2004). Pour $n \geq 2$, nous donnons à la section 4 le résultat suivant, qui va dans cette direction.

Soit $B(F)$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \mathcal{X}_n : (F^*)^n \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère lisse du tore déployé. Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module des $I(1)$-invariants de la série principale

$$\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \mathcal{X}$$

contient un quotient non nul d'un certain module standard régulier déterminé par la donnée de $\mathcal{X}$ (4.1). On exhibe alors des entrelacements entre les modules standards réguliers qui permettent de montrer, si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$ $\forall\ 1 \leq i \leq n-1$, que tout quotient non nul du module standard régulier associé à $\mathcal{X}$ est de dimension supérieure ou égale à $n!$. Puisque l'espace des $I(1)$-invariants d'une série principale est de dimension égale à $n!$ on obtient : la série principale induite par $\mathcal{X}$ est irréductible si et seulement si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$ (théorème 4).

La section 5 est consacrée à l'étude du cas particulier $n = 3$. Nous montrons que l'espace des $I(1)$-invariants d'une série principale est isomorphe à un module standard régulier. Dans le cas d'une série principale non ramifiée, non donnons de surcroît la semi-simplification de ce $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module.

1 Rappels et notations.

On désigne par O_F l'anneau des entiers de F et par O_F^* le groupe des éléments inversibles de O_F. On choisit π une uniformisante de O_F, et val la valuation normalisée par $val(\pi) = 1$. On fixe $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soient $\overline{\mathbb{Z}}_p$ son sous-anneau des entiers algébriques, et $\overline{\mathbb{F}}_p$ son corps résiduel. On note $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p} : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ l'inclusion, $r_p : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$, la réduction.

Pour k un corps, on désigne par $T(k)$ le tore déployé constitué par les matrices diagonales de $\mathrm{GL}_n(k)$, et par $B(k)$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. On considère le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$ en identifiant un élément de $\mathfrak{S}_n$ avec la matrice de permutation lui correspondant. L'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sur $T(\mathbb{F}_q)$ fournit une action sur le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$: pour $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, $w \in \mathfrak{S}_n$, on note $w\chi$ le caractère défini par $(w\chi)(t) = \chi(w^{-1}tw)$ pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$. On note Γ l'ensemble des orbites de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.

On désigne par R un anneau commutatif unitaire d'unité 1_R. Si R contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité, l'ensemble des R-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On note $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ lorsque R contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité et $q-1$ est inversible dans R.

On pose $G = \mathrm{GL}_n(F)$.

1.1 Représentations lisses et algèbres de Hecke. On se réfère à (Vignéras, 2004, A.1). Toutes les représentations considérées sont lisses : les stabilisateurs des points sont ouverts. On appelle caractère une représentation de dimension 1.

1.1.1 Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et $\sigma : K \to \mathrm{GL}(V)$ une R-représentation de K de type fini sur R. On note $ind_K^G\sigma$ l'induite compacte de σ à G. Elle s'identifie à l'espace des fonctions à support compact $f : G \to V$ vérifiant $f(kg) = \sigma(k)f(g)$ pour tous $k \in K$, $g \in G$, muni de la translation à droite, $(g_0.f)(g) = f(gg_0)$ pour tous g, $g_0 \in G$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, \sigma)$ est l'algèbre des entrelacements

$$\mathcal{H}_R(G, \sigma) = End_{R[G]}(ind_K^G\,\sigma).$$

1.1.2 On suppose que $\sigma : K \to R^*$ est un caractère. Un base de l'induite compacte du caractère σ est l'ensemble $\{f_{Kg,\sigma},\ g \in K\backslash G\}$ où l'on note $f_{Kg,\sigma}$ l'élément de $ind_K^G\sigma$ de support Kg et de valeur 1_R en g. Le $R[G]$-module $ind_K^G\sigma$ est engendré par $f_{K,\sigma}$.

La composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ est l'ensemble des fonctions $f : G \to R$ telles que $f(k_1gk_2) = \sigma(k_1)f(g)\sigma(k_2)$ pour $g \in G$, $k_1, k_2 \in K$.

On dit de $g \in G$ qu'il entrelace le caractère σ si pour tout $k \in K \cap gKg^{-1}$ on a $\sigma(k) = \sigma(g^{-1}kg)$. On note $\mathcal{S}_\sigma$ l'ensemble des éléments de G qui entrelacent σ. Pour tout $g \in \mathcal{S}_\sigma$ l'élément $T_{g,\sigma}$ de la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ de support KgK et de valeur 1_R en g est bien défini.

Par adjonction, l'algèbre de Hecke de σ s'identifie avec la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ munie du produit de convolution décrit par (Vignéras, 2004, A.1). Une base de l'algèbre de Hecke de σ est l'ensemble $\{T_{g,\sigma},\ g \in K\backslash\mathcal{S}_\sigma/K\}$. On appelle $\mathcal{S}_\sigma$ le support de l'algèbre de Hecke de σ.

1.1.3 On suppose que $\sigma = 1$ est le caractère trivial de K. On note alors $\mathcal{H}_R(G,K)$ son algèbre de Hecke et on l'appelle la R-algèbre de Hecke de K. Son support est égal à G tout entier et l'on notera simplement T_g l'élément $T_{g,1}$ de $\mathcal{H}_R(G,K)$ défini au paragraphe précédent. On notera $\mathbf{1}_K$ l'élément $f_{K,1}$ égal à la fonction caractéristique de K. L'induite compacte $ind_K^G 1$ est naturellement un module à gauche sur la R-algèbre de Hecke de K : pour tout $g \in G$, l'action de T_g est entièrement déterminée par l'action de T_g sur l'élément générateur $\mathbf{1}_K$ car l'action de $\mathcal{H}_R(G,K)$ commute à celle de G. Elle est donnée par

$$T_g(\mathbf{1}_K) = \sum_{x \in K\backslash KgK} x^{-1}\mathbf{1}_K = \sum_{x \in K\backslash KgK} \mathbf{1}_{Kx}.$$

La catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite est équivalente à la catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à gauche. En effet l'endomorphisme de R-modules de $\mathcal{H}_R(G,K)$

$$T \longmapsto (T^{\sim} : g \mapsto T(g^{-1})) \tag{1}$$

est un anti-isomorphisme pour le produit de convolution de l'algèbre $\mathcal{H}_R(G,K)$. Pour tout $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à droite M, on notera $[M]_\mathfrak{g}$ le $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à gauche avec le même espace, et sur lequel l'action de $\mathcal{H}_R(G,K)$ donnée par $T.m := m.T^{\sim}$ pour $m \in M$, $T \in \mathcal{H}_R(G,K)$. Désormais, en l'absence de précision, un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module sera par défaut un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à gauche.

1.1.4 Si (ρ, V) est une R-représentation de G, son espace des K-invariants est un module à droite sur la R-algèbre de Hecke de K : soit $v \in V^K$; il existe un unique morphisme de $R[G]$-modules $\Phi_v : R[K\backslash G] \to V$ tel que $\mathbf{1}_K \mapsto v$. Pour tout T appartenant à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,K)$, l'action à droite de T sur v est donnée par $v.T := \Phi_v \circ T\,(\mathbf{1}_K)$.

1.2 Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de G, et $I(1)$ son unique pro-p-Sylow : I est l'image inverse, par la réduction modulo π, $\mathrm{GL}_n(O_F) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, du sous-groupe de

Borel $B(\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$; $I(1)$ est l'image inverse du sous-groupe de $B(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices unipotentes. Les sous-groupes $I(1)$ et I de G sont ouverts et compacts. Ils sont normalisés par l'élément $\omega \in G$ défini par

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ \pi & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe $I(1)$ de G étant un pro-p-groupe, toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de G admet un vecteur non nul invariant par $I(1)$ (Barthel, Livné, 1994, Lemme 1).
Le quotient $I/I(1)$ s'identifie au tore fini $T(\mathbb{F}_q)$. Tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I est trivial sur $I(1)$ et s'identifie avec un élément de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$.

D'après 1.1.4 on dispose d'un foncteur naturel de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$ dans la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules à droite. On l'appelle le foncteur des $I(1)$-invariants. Ses propriétés sont encore énigmatiques. On dispose toutefois de l'assertion suivante (Vignéras, 2004, 4.3) :

Proposition 1 (Critère d'irréductibilité) *Soit (ρ, V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de G engendrée par son espace $V^{I(1)}$ des $I(1)$-invariants. Si le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite $V^{I(1)}$ est irréductible, alors la représentation (ρ, V) est irréductible.*

1.3 Induction parabolique.

1.3.1 Soit L un sous-groupe de Levi standard de G, et P le parabolique supérieur associé. Soit (ρ, V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation de L. On désigne par $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ la représentation de G obtenue par induction parabolique de ρ (Vignéras, 1994, II.2). C'est la partie lisse du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module des fonctions $f : G \to V$ telles que $f(pg) = \rho(p)f(g)$ pour tous $p \in P$, $g \in G$, muni de la translation à droite $(g_0.f)(g) = f(gg_0)$, pour tous $g, g_0 \in G$.

On suppose que $\rho : L \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ est un caractère de G. Pour $g \in G$, l'élément $f_{PgI(1),\rho} \in \mathrm{Ind}_P^G \rho$ $I(1)$-invariant de support $PgI(1)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en g est bien défini. D'après (Vignéras, 1994, I.5.6), l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_P^G \rho$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|P\backslash G/I(1)|$ de base $\{f_{PgI(1),\rho}\}_{g \in P\backslash G/I(1)}$.

Choisissons pour sous-groupe de Levi le tore diagonal $T(F)$ de G. Soit $\mathfrak{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$

un caractère de $T(F)$. On considère la série principale

$$\mathrm{Ind}_{B(F)}^G \mathfrak{X}.$$

Un système de représentants des doubles classes $B(F)\backslash G/I(1)$ est donné par les éléments du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ considéré comme un sous-groupe de G. C'est une conséquence de la décomposition de Bruhat pour le groupe fini $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (Cabanes, Enguehard, Théorème 2.14). Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de l'espace $(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G \mathfrak{X})^{I(1)}$ est donc donnée par $\{f_{B(F)wI(1),\mathfrak{X}}\}_{w\in\mathfrak{S}_n}$.

1.4 Le groupe réductif G est muni d'un système de Tits généralisé (Bruhat, Tits). Nous rappelons les propriétés dont nous aurons l'usage.

Soit $(X,\, X^\vee,\, R_0,\, R_0^\vee, B, B^\vee)$ la donnée radicielle affine associée à $(G, B(F), T(F))$ (Lusztig, 1.), (Bruhat, Tits, 6.). L'ensemble X est le groupe additif des matrices diagonales dont les cœfficients diagonaux sont des puissances de π. On dit d'un élément de X qu'il est dominant s'il est égal à la diagonale $(\pi^{v_1}, \pi^{v_2}, ..., \pi^{v_n})$ avec $v_1, ...v_n \in \mathbb{Z}$, $v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n$. On note X_{dom} le semi-groupe constitué par les éléments dominants de X.

Soit $N(F)$ le normalisateur dans G du tore déployé $T(F)$. Le groupe de Weyl de G est le groupe quotient $W_0 = N(F)/T(F)$. Un système de représentants du quotient $N(F)/T(F)$ est donné par $\mathfrak{S}_n$ que l'on identifiera désormais avec W_0. Ainsi, W_0 est un groupe de Coxeter de système générateur $\mathrm{S}_0 = \{s_1, .., s_{n-1}\}$ où, pour $i \in \{1, .., n-1\}$, on désigne par s_i la transposition associée à la racine simple α_i.

Le groupe de Weyl affine W_{aff} de G est le produit semi-direct $W_{aff} = W_0.X_{aff}$ où X_{aff} est le sous-groupe de X engendré par R_0. Si α_0 est la racine la plus longue et s la réflexion associée, on note $s_0 = \alpha_0.s \in W_{aff}$. A l'aide de l'élément ω défini au paragraphe 1.2, l'élément s_0 s'écrit $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$. D'après (Iwahori, Matsumoto, Proposition 1.1), le groupe W_{aff} est un groupe de Coxeter de système générateur $S = \{s_0, s_1, .., s_{n-1}\}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a les relations $s_i = \omega^{-1}s_{i-1}\omega$ et $s_i s_{i-1} s_i = s_{i-1} s_i s_{i-1}$.

Pour $s \in S$, on désigne par $\Phi_s : \mathrm{GL}_2(F) \to G$ le morphisme associé (Iwahori, Matsumoto) et par $T_s(\mathbb{F}_q)$ le sous-groupe de $T(\mathbb{F}_q)$ égal à l'image du cocaractère $h_s : \mathbb{F}_q^* \to T(\mathbb{F}_q)$ associé à s. Pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, on rappelle que $h_s(\alpha) = \Phi_s \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Pour $s \in S$, on pose

$\delta_s = \Phi_s \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $T(O_F)$ le sous-groupe de $T(F)$ constitué par les diagonales d'éléments de O_F^*. Le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W} = N(F)/T(O_F)$ s'identifie à un sous-groupe de G isomorphe au produit semi-direct $W_0.X$. Notant $< \omega >$ le groupe cyclique engendré par

ω , le groupe de Weyl affine étendu s'écrit aussi $< \omega > .W_{aff}$ où ω normalise W_{aff}. Ainsi, la longueur ℓ du système de Coxeter (W_{aff}, S) se prolonge à $\tilde{W}$ de façon à ce que le groupe $< \omega >$ soit l'ensemble des éléments de longueur nulle (Lusztig, 1.4). Le groupe de Weyl affine étendu fournit un système de représentants des doubles classes de G modulo le sous-groupe d'Iwahori standard I (Iwahori, Matsumoto, Proposition 2.1).

On note $T(1+\pi O_F)$ le sous-groupe de $T(O_F)$ constitué par les diagonales d'éléments de $1+\pi O_F$. Rappelons que le tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec un sous-groupe de $T(O_F)$ *via* l'isomorphisme de Teichmüller de $\mathbb{F}_q^*$ à valeurs dans le groupe des racines de l'unité de O_F^* d'ordre premier à p : on a la suite exacte scindée

$$0 \to T(1+\pi O_F) \to T(O_F) \to T(\mathbb{F}_q) \to 0.$$

Grâce à cette identification, le sous-groupe d'Iwahori standard I de G s'écrit comme le produit semi-direct $T(\mathbb{F}_q).I(1)$.

Comme dans (Vignéras, 2005), on notera parfois $X^{(1)}$ le tore déployé $T(F)$, pour insister sur le fait qu'il s'identifie avec le produit direct $X \times T(\mathbb{F}_q)$. On dira de $x \in X^{(1)}$ qu'il est dominant si c'est une diagonale $(x_1, ..., x_n)$ telle que $val(x_1) \leq ... \leq val(x_n)$. Le semi-groupe $X^{(1)}_{dom}$ des éléments dominants de $X^{(1)}$ s'identifie avec le semi-groupe $X_{dom} \times T(\mathbb{F}_q)$.

On note $W^{(1)}$ le groupe quotient $N(F)/T(1+\pi O_F)$. Il s'identifie avec un sous-groupe de G isomorphe au produit semi-direct $W_0.X^{(1)}$. Il fournit un système de représentants des doubles classes de G modulo le pro-p-Iwahori $I(1)$. On prolonge la longueur ℓ de $\tilde{W}$ à $W^{(1)}$ de façon à ce que $\ell(twt') = \ell(w)$ pour tous $t, t' \in T(\mathbb{F}_q)$, $w \in W^{(1)}$ (Vignéras, 2005, Proposition 1).
On considère l'action de $W^{(1)}$ sur $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ qui se factorise par celle de $W_0 \simeq \mathfrak{S}_n$.

2 Présentations de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

2.1 Présentation de Iwahori-Matsumoto.

2.1.1 L'anneau de Hecke $\mathcal{H}_\mathbb{Z}(G, I(1))$ du pro-p-Iwahori de G possède une présentation de type Iwahori-Matsumoto. Pour tout $w \in W^{(1)}$, on désigne, comme au paragraphe 1.1.3, par T_w l'élément de $\mathcal{H}_\mathbb{Z}(G, I(1))$ de support $I(1)wI(1)$ et de valeur 1 en w. Le théorème suivant est démontré dans (Vignéras, 2005, 1.3).

Théorème 1 *L'anneau de Hecke $\mathcal{H}_\mathbb{Z}(G, I(1))$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $(T_w)_{w \in W^{(1)}}$ vérifiant :*
(a) les relations de tresses, $T_w T_{w'} = T_{ww'}$ pour $w, w' \in W^{(1)}$ tels que $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$,
(b) les relations quadratiques, $(T_s)^2 = q + T_s(\sum_{t \in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s} T_t)$ pour $s \in S$.

Notation 1 – On note $q_R := q.1_R$. Désormais, on considère q comme une indéterminée et R comme un $\mathbb{Z}[q]$-module *via* le morphisme d'anneaux unitaires défini par $q \mapsto q_R$.
– On note $\mathcal{H}^{(1)}$ la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de générateurs $(T_w)_{w\in W^{(1)}}$ vérifiant les relations (a) et (b) du théorème. Puisque ω et $t \in T(\mathbb{F}_q)$ sont de longueur nulle dans $W^{(1)}$, les éléments T_ω et T_t de la base de Iwahori-Matsumoto leur correspondant sont inversibles dans $\mathcal{H}^{(1)}$. Du fait de la présentation du groupe $W^{(1)}$, les relations de tresses montrent que l'ensemble $\{T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}, T_t \in T(\mathbb{F}_q)\}$ est un système générateur de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$.
– On note $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ l'algèbre obtenue après addition d'une racine carrée et d'un inverse de q à l'anneau des scalaires de $\mathcal{H}^{(1)}$. D'après les relations quadratiques, l'élément T_{s_1} est inversible dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$. Ainsi, tout élément de la base de Iwahori-Matsumoto est inversible dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$.
– On désigne par $\mathcal{H}_R^{(1)}$ la R-algèbre $\mathcal{H}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$. Elle s'identifie à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, I(1))$.

Pour tout $w \in W^{(1)}$, l'élément $T_w^* = q^{\ell(w)}(T_w)^{-1}$ appartient à $\mathcal{H}^{(1)}$, où $(T_w)^{-1}$ désigne l'inverse de T_w dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ (Vignéras, 2005, Remarque 7). Par exemple, pour $s \in S$,

$$T_s^* = T_s - \sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s} T_t. \tag{2}$$

2.1.2 Supposons que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. La preuve de (Vignéras, 2004, Proposition 2.1) qui traite le cas de $\mathrm{GL}_2(F)$ s'adapte aisément à G. Cette proposition se traduit de la façon suivante : l'induite compacte du caractère trivial de $I(1)$ à valeurs dans R se décompose en la somme directe de $R[G]$-modules

$$ind_{I(1)}^G 1 \simeq \bigoplus_{\chi\in\hat{T}(\mathbb{F}_q)} ind_I^G \chi. \tag{3}$$

De plus, il n'y a pas de morphisme non nul entre les $R[G]$-modules $ind_I^G\chi$ et $ind_I^G\chi'$ si χ et χ' ne sont pas conjugués sous l'action de W_0. On obtient ainsi la décomposition de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R^{(1)}$ en le produit d'algèbres de Hecke

$$\mathcal{H}_R^{(1)} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma),$$

où pour $\gamma \in \Gamma$, on désigne par σ_γ la R-représentation de I triviale sur $I(1)$ donnée par $\sigma_\gamma = \bigoplus_{\chi\in\gamma} \chi$.

Pour $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, on note ϵ_χ l'élément de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G 1 \twoheadrightarrow ind_I^G\chi$. On pose alors $\epsilon_\gamma = \sum_{\chi\in\gamma} \epsilon_\chi$. C'est un idempotent central de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma)$ s'identifie avec l'algèbre $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité ϵ_γ.

Le corollaire 4 de (Vignéras, 2005) donne :

Théorème 2 *La R-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R^{(1)}$ est le produit, sur les W_0-orbites γ de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$, des R-algèbres $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$, d'unité ϵ_γ et de base $(T_w \epsilon_\chi)_{w \in \tilde{W}, \chi \in \gamma}$, avec les relations :*
(a) pour χ, $\chi' \in \gamma$, $\chi \neq \chi'$, $\epsilon_\chi^2 = \epsilon_\chi$, $\epsilon_\chi \epsilon_{\chi'} = 0$, $\sum\limits_{\chi \in \gamma} \epsilon_\chi = \epsilon_\gamma$,
(b) pour $w \in \tilde{W}$, $\chi \in \gamma$, $T_w \epsilon_\chi = \epsilon_{w\chi} T_w$,
(c) pour w, $w' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a $T_w T_{w'} \epsilon_\gamma = T_{ww'} \epsilon_\gamma$,
(d) pour $s \in S$, $(T_s)^2 \epsilon_\gamma = q_R \epsilon_\gamma + (q_R - 1) T_s \sum\limits_{\chi \in \gamma, \, s\chi = \chi} \chi(\delta_s) \epsilon_\chi$.

Remarque 1 Pour $s \in S$, on a $T_s^* \epsilon_\gamma = T_s \epsilon_\gamma + (1 - q_R) \sum\limits_{\chi \in \gamma, \, s\chi = \chi} \chi(\delta_s) \epsilon_\chi$.

Lemme 1 *Dans la R-base de Iwahori-Matsumoto $(T_w)_{w \in W^{(1)}}$ de $\mathcal{H}_R^{(1)}$, l'élément ϵ_χ se décompose comme suit :*

$$\epsilon_\chi = (q_R - 1)^{-n} \sum\nolimits_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) T_t.$$

En particulier, pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, on a $\epsilon_\chi T_t = T_t \epsilon_\chi = \chi(t^{-1}) \epsilon_\chi$.

Preuve On utilise les notations et remarques du paragraphe 1.1.3. Soient $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ et f l'élément de l'induite compacte $ind_{I(1)}^G 1$ défini par $f = \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) t^{-1} \mathbf{1}_{I(1)}$. Son support est inclus dans I et sa valeur en l'unité de G est égale à $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Un élément $u \in I$ agit sur f par

$$uf = u \,(\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) t^{-1} \mathbf{1}_{I(1)}) = \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(u) \chi(tu^{-1}) (tu^{-1})^{-1} \mathbf{1}_{I(1)} = \chi(u) f.$$

Ainsi, f est l'élément noté $f_{I,\chi}$ de $ind_I^G \chi$ de support I et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en l'unité de G.

On note $p_\chi := (q_R - 1)^{-n} \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) T_t \in \mathcal{H}_R^{(1)}$ l'élément du lemme dont on veut montrer qu'il est égal à la projection $\epsilon_\chi : ind_{I(1)}^G 1 \twoheadrightarrow ind_I^G \chi$. Nous allons calculer l'image de $f_{I,\chi'}$ par p_χ et montrer qu'elle est nulle si $\chi \neq \chi'$, égale à $f_{I,\chi}$ sinon. Ainsi, puisque le $R[G]$-module $ind_I^G \chi'$ est engendré par $f_{I,\chi'}$, on aura montré que p_χ et ϵ_χ coïncident sur chaque sous-espace de la décomposition (3).

Pour tout $u \in T(\mathbb{F}_q)$, puisque $I(1) u I(1) = I(1) u$, on a $T_u(\mathbf{1}_{I(1)}) = u^{-1} \mathbf{1}_{I(1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_\chi(f_{I,\chi'}) &= (q_R - 1)^{-n} \textstyle\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) t^{-1} p_\chi(\mathbf{1}_{I(1)}) \\ &= (q_R - 1)^{-n} \textstyle\sum_{t,u \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) \chi(u) t^{-1} T_u \mathbf{1}_{I(1)} \\ &= (q_R - 1)^{-n} \textstyle\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) \chi(t^{-1}) \sum_{u \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(ut) (ut)^{-1} \mathbf{1}_{I(1)} \\ &= (q_R - 1)^{-n} (\textstyle\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) \chi(t^{-1})) f_{I,\chi}. \end{aligned}$$

Or, si $\chi \neq \chi'$ la somme $\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) \chi(t^{-1})$ est nulle, tandis que si $\chi = \chi'$ elle vaut $(q_R - 1)^n$. Ainsi, $p_\chi(f_{I,\chi'}) = 0$ si $\chi' \neq \chi$, et $p_\chi(f_{I,\chi}) = f_{I,\chi}$ sinon. $\square$

2.2 Base de Bernstein entière. On dispose d'une présentation de Bernstein de l'anneau de Hecke $\mathcal{H}^{(1)}$ qui reflète la décomposition $W^{(1)} = W_0.X^{(1)}$. Elle est inspirée par la présentation de Bernstein pour la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori de G (Lusztig, 3).

Dans l'algèbre $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on définit les analogues des éléments de Bernstein de la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori : pour $w \in W^{(1)}$, on pose $\tilde{T}_w = q^{-\ell(w)/2} T_w$. Soit $x \in X^{(1)}$, $x = y - z$ avec $y, z \in X^{(1)}_{dom}$. L'élément $\theta^{(1)}_x = \tilde{T}_y \tilde{T}_z^{-1}$ ne dépend pas du choix de x et y. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}][X^{(1)}] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}] \\ x & \longmapsto & \theta^{(1)}_x \end{array}$$

est un morphisme injectif de $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbres (Vignéras, 2005, Proposition 4). On note $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ son image.

Pour $w = w_0 x \in W_0.X^{(1)}$, on pose

$$E_w := q^{\ell(w)/2} \tilde{T}_{w_0} \theta^{(1)}_x. \tag{4}$$

Notation 2 Soit I un sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$. On désigne par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I, et de 1 ailleurs. Si I est le singleton $\{i\}$, on notera simplement x_i. D'après l'appendice de (Vignéras, 2006), la longueur de l'élément $x_I \in W^{(1)}$ est égale à $|I|(n - |I|)$. L'élément E_{x_I} sera noté E_I. En particulier, $E_{\{1,..,n\}}$ est égal à l'élément central inversible T_ω^n.

Exemple 1 – On a $E_{w_0} = T_{w_0}$ pour $w_0 \in W_0$, $E_x = T_x$ pour $x \in X^{(1)}_{dom}$.
- L'inverse de l'élément $x_1 = s_1 ... s_{n-1}\omega$ de longueur $n - 1$ est dominant, donc dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on a
$$\theta^{(1)}_{x_1} = (\theta^{(1)}_{x_1^{-1}})^{-1} = q^{(n-1)/2} T_{s_1}^{-1} ... T_{s_{n-1}}^{-1} T_\omega.$$
On en déduit que $T_\omega = q^{-(n-1)/2} T_{s_{n-1}} ... T_{s_1} \theta^{(1)}_{x_1}$. Mais on reconnaît précisément dans cette écriture l'élément E_ω. Donc, $E_\omega = T_\omega$. On a aussi montré ainsi que $E_{\{1\}} = q^{(n-1)/2}\theta^{(1)}_{x_1} = T^*_{s_1} T^*_{s_2} ... T^*_{s_{n-1}} T_\omega$.
- L'élément le plus long de W_0 est $s = s_1 s_2 ... s_{n-1} ... s_2 s_1$. L'élément $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$ se décompose dans $W^{(1)} = W_0.X^{(1)}$ comme suit : $s_0 = s\, x_1 x_n^{-1}$. Les calculs que l'on vient de faire montrent alors que $E_{s_0} = q T_{s_0}^{-1} = T^*_{s_0}$.

Dans tous les cas, on remarque que les éléments $E_?$ que l'on a calculés appartiennent en fait à la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$.

Théorème 3 *(Vignéras, 2005, 1.4)*

(a) Une $\mathbb{Z}[q]$-base de $\mathcal{H}^{(1)}$ est donnée par $(E_w)_{w \in W^{(1)}}$.
(b) L'ensemble $(E_x)_{x \in X^{(1)}}$ est une base de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}] \cap \mathcal{H}^{(1)}$. Un système de générateurs de $\mathcal{A}^{(1)}$ est donné par

$$E^{\pm 1}_{\{1,..,n\}},\ (E_I)_{I \subsetneq \{1,..,n\}},\ (T_t)_{t \in T(\mathbb{F}_q)},$$

avec les relations :

$$T_t T_{t'} = T_{tt'},\ \textit{pour}\ t, t' \in T(\mathbb{F}_q),$$

et pour $I, J \subset \{1, ..., n\}$,

$$E_I E_J = q^{bc} E_{I\cup J} E_{I\cap J} \quad \textit{où}\ |I \cap J| = a,\ |I| = a + b,\ |J| = a + c. \tag{5}$$

(c) L'action naturelle de W_0 *sur* $X^{(1)}$ *fournit une action de* W_0 *sur* $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ *qui stabilise* $\mathcal{A}^{(1)}$*. Le centre de* $\mathcal{H}^{(1)}$ *est égal au sous-anneau des* W_0*-invariants de* $\mathcal{A}^{(1)}$*. C'est la* $\mathbb{Z}[q]$*-algèbre de générateurs*

$$E_{\{1,...,n\}}^{\pm 1}, \qquad \sum_{\substack{I\subset\{1,...,n\}\\ |I|=t}} E_I \quad \textit{pour } t \textit{ parcourant } \{1, ..., n\}.$$

(d) La $\mathbb{Z}[q]$*-algèbre* $\mathcal{H}^{(1)}$ *est un module de type fini sur son centre.*
(e) On suppose que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$*. Soit* $\gamma \in \Gamma$*.*
Une base de la R*-algèbre* $\mathcal{H}_R^{(1)}\epsilon_\gamma$ *d'unité* ϵ_γ *est donnée par* $(E_w \epsilon_\chi)_{w\in\tilde{W},\chi\in\gamma}$.

Notation 3 On ne suppose pas que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. On note $\mathcal{A}_R^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{H}_R^{(1)}$. La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module *via* sa projection $\mathcal{A}_R^{(1)}$ dans $\mathcal{H}_R^{(1)}$.

On appellera *R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$* un morphisme d'anneaux unitaires $\mathcal{A}^{(1)} \to R$ tel que $q \mapsto q_R$. L'action de W_0 sur $\mathcal{A}^{(1)}$ induit une action de W_0 sur les R-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$. On considère l'action de $W^{(1)}$ sur $\mathcal{A}^{(1)}$ et ses R-caractères qui se factorise par celle de W_0. On la note $(w, \lambda) \mapsto w.\lambda$ pour $w \in W^{(1)}$ et λ un R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$.

3 Modules standards de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$

Définition 1 *On appelle* $\mathcal{H}_R^{(1)}$*-module standard induit par le* R*-caractère* $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ *le* $\mathcal{H}_R^{(1)}$*-module*

$$I(\lambda) = \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \lambda.$$

3.1 Propriétés des modules standards. Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ un R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$.

- Le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ est un R-module de type fini.
- Il est engendré comme $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module par $\varphi = 1 \otimes 1$, qui est un élément propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ. On appellera φ le *générateur canonique* de $I(\lambda)$.
- Le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par λ possède la propriété universelle suivante : tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module engendré par un élément propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ est quotient de $I(\lambda)$.

– Si R est un corps algébriquement clos, tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard.
– Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ et $r_p\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ sa réduction modulo p. Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$-module standard induit par $r_p\lambda$ est égal à la réduction modulo p du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ :

$$I(r_p\lambda) = I(\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

– Si R est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ est un R-espace vectoriel de dimension $|W_0|$.

Les premières propriétés sont des conséquences directes du théorème 3 et de la définition des modules standards. La dernière est une conséquence du théorème de Bernstein (Vignéras, 2005, Proposition 6) qui nous assure que $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ est un $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$-module libre de base $(T_w)_{w \in W_0}$.

Proposition 2 *Les $\mathcal{H}_R^{(1)}$-modules standards induits par λ et $\omega.\lambda$ son isomorphes comme R-modules.*

Preuve La conjugaison par l'élément ω définit un isomorphisme du groupe $W^{(1)}$ qui stabilise le sous-groupe $X^{(1)}$ des éléments diagonaux. On en déduit un isomorphisme Φ du $\mathbb{Z}[q]$-module $\mathcal{H}^{(1)}$ défini sur la base de Bernstein entière par $\Phi : E_? \mapsto E_{\omega ? \omega^{-1}}$ et qui stabilise la sous-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}$.
Il vérifie, pour $w \in W^{(1)}$, $x \in X^{(1)}$, $\Phi(E_w E_x) = \Phi(E_w)\Phi(E_x)$. Cette relation tient au fait que la conjugaison par l'élément de longueur nulle ω préserve la longueur et que, d'après (Vignéras, 2006, (1.6.3)), on a $E_w E_x = q^{(\ell(w)+\ell(x)-\ell(wx))/2} E_{wx}$ avec $q^{(\ell(w)+\ell(x)-\ell(wx))/2} \in \mathbb{Z}[q]$.
Puisque la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}$ a pour base l'ensemble des $\{E_x\}_{x \in X^{(1)}}$ et que la composition $\lambda \circ (\Phi|_{\mathcal{A}^{(1)}})^{-1}$ n'est autre que le caractère $\omega.\lambda$ on en déduit un isomorphisme de R-modules entre $I(\lambda)$ et $I(\omega.\lambda)$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \lambda & \longrightarrow & \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \omega.\lambda \\ h \otimes 1 & \longmapsto & \Phi(h) \otimes 1. \end{array}$$

□

3.2 $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}^{(1)}$-modules standards. Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-caractère. Puisque $\mathcal{A}^{(1)}$ est une $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de type fini, l'image de λ est contenue dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Ceci permet, dans l'étude des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}^{(1)}$-modules standards, de raisonner comme si $\overline{\mathbb{Z}}_p$ était un anneau de valuation discrète. Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}^{(1)}$-module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module qui se décompose en la somme directe de sa partie libre $\mathcal{L}(\lambda)$ et de sa partie de torsion $\mathcal{T}(\lambda)$. Le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de torsion $\mathcal{T}(\lambda)$ est un module pour la $\overline{\mathbb{Z}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}^{(1)}$. Ainsi, le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module $\mathcal{L}(\lambda)$ hérite d'une structure de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}^{(1)}$-module quotient.

3.3 Structures entières de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards. Les propositions suivantes sont une adaptation au cas de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori des résultats de (Vignéras, 2006, Theorème 5) qui traite le cas de l'anneau de Hecke-Iwahori. Les preuves se transposent directement.

Soit M_0 un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module, de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On dit que le sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module L de M_0 en est une structure entière si c'est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de type fini qui contient une base du $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel M_0.

Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module, de type fini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On dit que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module M_0 relève M si M_0 admet une structure entière L telle que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules : $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \simeq M$.

On dira d'un caractère $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ qu'il est *entier* s'il est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_p$.

Proposition 3 – *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ admet une structure entière si et seulement si λ est entier.*
– *Supposons que $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est entier. On note $L(\lambda)$ le sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module de $I(\lambda)$ engendré par son générateur canonique φ. C'est une structure entière de $I(\lambda)$.*

On appelle $L(\lambda)$ la *structure entière canonique* de $I(\lambda)$.

Proposition 4 *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un caractère entier. Soit L une structure entière de $I(\lambda)$. La semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ ne dépend pas du choix de la structure entière L.*

3.4 Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère. Grâce au théorème 5 de (Vignéras, 2006), nous comparons la partie $\overline{\mathbb{Z}}_p$-libre du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ avec la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$:

Proposition 5 *La partie libre $\mathcal{L}(\lambda)$ du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module libre de rang $|W_0|$.*

Corollaire 1 *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module $I(\lambda)$ est sans $\overline{\mathbb{Z}}_p$-torsion si et seulement s'il est isomorphe à la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda$.*

3.5 Etude des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards. Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$, un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$.

Proposition 6 *Il existe $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ c'est-à-dire tel que $\lambda = r_p \circ \lambda_0$.*

Corollaire 2 *Un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard est la réduction d'un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard. En particulier, un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $|W_0|$.*

Corollaire 3 *Soit $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-caractère relevant λ.*
Si le module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|W_0|$, alors le module standard $I(\lambda_0)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module sans torsion et est isomorphe, comme $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module, à la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$.

La proposition 6 est prouvée par (Vignéras, 2004, Théorème 6). Notons que si $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ relève λ alors $w.\lambda_0$ relève $w.\lambda$, pour $w \in W_0$.

Par projection dans $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ de la relation (5) du théorème 3, il apparaît que si $I, J \subset \{1, ..., n\}$ vérifient $I \not\subset J$ et $J \not\subset I$, alors $E_I E_J = 0$ dans $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. On en déduit qu'il existe un drapeau, appelé *drapeau de* λ,

$$\emptyset \subsetneq I_1 \subsetneq ... \subsetneq I_r \subsetneq I_{r+1} = \{1, .., n\} \tag{6}$$

tel que pour tout $\emptyset \subsetneq I \subset \{1, ..., n\}$,

$\lambda(E_I) \neq 0$ si et seulement si I est l'un des éléments $I_1, ..., I_{r+1}$ de ce drapeau.

On dira d'un sous-ensemble I de $\{1, ...n\}$ qu'il est dominant si la diagonale x_I lui correspondant (notation 2) est un élément dominant de X. Cela signifie que I est l'un des éléments $\emptyset$, $\{n\}$, $\{n-1, n\}$, ..., $\{2, ..., n-1, n\}$, $\{1, ..., n-1, n\}$. On dira du drapeau de λ qu'il est dominant s'il est constitué de sous-ensembles dominants de $\{1, ..., n\}$.

Remarque 2 Le caractère λ est entièrement déterminé par la donnée de $\{\lambda(E_{I_i})\}_{i=1,..,r+1}$ et de l'élément $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\lambda(T_t) = \chi(t)$ $\forall t \in T(\mathbb{F}_q)$.

Définition 2 – *On dit de λ qu'il est régulier si son drapeau est complet c'est-à-dire si $r + 1 = n$.*
– *Sinon, on dit de λ qu'il est singulier.*
– *Dans le cas particulier où le drapeau est trivial, i.e $r = 0$, on dit que λ est un caractère supersingulier.*

Lorsque λ est régulier (resp. singulier, resp. supersingulier), le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est dit régulier (resp. singulier, resp. supersingulier). Tout $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module quotient de $I(\lambda)$ sera alors dit régulier (resp. singulier, resp. supersingulier).

Remarque 3 – Si λ est régulier (resp. singulier), un caractère appartenant à son orbite sous l'action de W_0 est également régulier (resp. singulier). Si λ est supersingulier, son orbite est de cardinal 1.
– Dans l'orbite de λ sous l'action de W_0 il y a un caractère de drapeau dominant.

4 Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p.

L'objet de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère du tore diagonal de G. La série principale $\mathrm{Ind}_{B(F)}^G \mathcal{X}$ induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible si et seulement si*

$$\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1} \textit{ pour tout } i \in \{1, .., n-1\}.$$

La condition nécessaire est claire. Nous allons démontrer la condition suffisante.

4.1 Modules standards réguliers de drapeau dominant et $I(1)$-invariants des séries principales.

4.1.1 On note $\mathcal{D}$ la sous-$\mathbb{Z}[q]$-algèbre de $\mathcal{A}^{(1)}$ engendrée par les éléments T_x, pour x parcourant le semi-groupe $X_{dom}^{(1)}$ des éléments dominants de $X^{(1)}$.

On appellera $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ tout morphisme d'anneaux $\mathcal{D} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ qui à l'indéterminée q associe $0 = q_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Par exemple, la restriction à $\mathcal{D}$ d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$.

Remarque 4 Rappelons que pour $x \in X_{dom}^{(1)}$, l'élément E_x de la base de Bernstein entière coïncide avec l'élément de la base de Iwahori-Matsumoto T_x. Il appartient donc à $\mathcal{D}$. En particulier si I est un sous-ensemble dominant de $\{1, ..., n\}$, c'est-à-dire que I est un élément du drapeau

$$\emptyset \subsetneq \{n\} \subsetneq \{n-1, n\} ... \subsetneq \{2, ..., n-1, n\} \subsetneq \{1, ..., n-1, n\} \tag{7}$$

alors la diagonale x_I lui correspondant appartient à X_{dom} et $E_I = T_{x_I}$ appartient à $\mathcal{D}$.

D'après (Vignéras, 2006, (1.6.5)), dans $X_{dom}^{(1)}$, les longueurs s'ajoutent : $\forall x, y \in X_{dom}^{(1)}$, on a $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$. Ainsi, d'après les relations de tresses dans $\mathcal{H}^{(1)}$, on a $T_x T_y = T_{xy}$ dans $\mathcal{D}$.

Par conséquent, la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$ est engendrée par les éléments T_x pour x parcourant un système générateur du semi-groupe $X_{dom}^{(1)}$: elle est engendrée par les éléments

$$E_I, \text{ pour } I \text{ parcourant le drapeau (7), } E_{\{1,...,n\}}^{\pm 1}, \text{ et } T_t \text{ pour } t \in T(\mathbb{F}_q).$$

Lemme 2 *Un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ s'étend de façon unique en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant.*

Preuve Un drapeau dominant est un sous-drapeau de (7). Ainsi, d'après la remarque 2, un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant est univoquement déterminé par la donnée de ses valeurs en les T_t pour $t \in T(\mathbb{F}_q)$, et en les $E_I = T_{x_I}$ pour I parcourant le drapeau (7), c'est-à-dire qu'il est univoquement déterminé par ses valeurs sur un système générateur de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$. $\square$

Soit λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant. On le suppose de surcroît régulier c'est-à-dire que le drapeau de λ est égal au drapeau (7).

Lemme 3 *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module. Un élément $m \in M$ est propre pour l'action de $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ si et seulement s'il est propre pour l'action de $\mathcal{D}$ pour la restriction de λ à $\mathcal{D}$.*

Preuve On suppose que m est non nul et que la sous-$\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur m par la restriction à $\mathcal{D}$ du caractère λ. D'après le théorème 3, la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ est engendrée par les éléments

$$E_I \text{ pour } I \subset \{1, ..., n\},\ E^{\pm 1}_{\{1,...,n\}}, \text{ et } T_t,\, t \in T(\mathbb{F}_q).$$

Ainsi, pour s'assurer que $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur m par le caractère λ, il suffit de vérifier que pour I non dominant E_I agit sur m par multiplication par le scalaire $\lambda(E_I)$.

Soit $I \subset \{1, ..., n\}$ non dominant. Puisque le drapeau de λ est dominant, il ne contient pas I de sorte que $\lambda(E_I) = 0$. Il nous faut donc montrer que $E_I m = 0$. Il existe $J \subset \{1, ..., n\}$ dominant tel que $I \not\subset J$ et $J \not\subset I$. (On peut par exemple choisir l'élément du drapeau (7) de même cardinal que I.) D'après la relation (5), cela implique que le produit $E_I E_J$ est nul dans $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, et donc $E_I E_J m = 0$. Mais, d'autre part, puisque J est dominant, E_J appartient au drapeau de λ donc $\lambda(E_J) \neq 0$ et E_J appartient à $\mathcal{D}$ donc $E_J m = \lambda(E_J) m$. Ainsi, $E_I E_J m = \lambda(E_J) E_I m$ avec $\lambda(E_J) \neq 0$. On a démontré que $E_I m = 0$. $\square$

Remarque 5 Lorsque λ est régulier de drapeau non nécessairement dominant, on a un résultat analogue qui se démontre avec les mêmes arguments : l'élément $m \in M$ est propre pour l'action de $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ si et seulement si la sous-algèbre de $\mathcal{A}^{(1)}$ engendrée par les éléments

$$E_J, \text{ avec } J \subset \{1, ..., n\} \text{ appartenant au drapeau de } \lambda, \text{ et } T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)$$

agit sur m par la restriction du caractère λ.

Par la propriété universelle du module standard induit par λ, on déduit du lemme 3 que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda) & \simeq & \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{D}} \lambda \\ \varphi & \mapsto & 1 \otimes 1 \end{array} \tag{8}$$

où φ désigne le générateur canonique de $I(\lambda)$ et où l'on note encore λ la restriction de λ à la sous-algèbre $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}^{(1)}$.

4.1.2 Soit $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du tore déployé $T(F)$ de G. Puisque dans $X^{(1)}_{dom}$ les longueurs s'ajoutent, $\mathcal{X}$ induit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ encore noté $\mathcal{X}$ et défini par : $\mathcal{X}(T_x) := \mathcal{X}(x), \quad \forall x \in X^{(1)}_{dom}$. D'après le lemme 2, ce $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ s'étend de façon unique en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ régulier de drapeau dominant que l'on notera $\lambda_{\mathcal{X}}$. On définit ainsi une bijection

$$\mathcal{X} \longmapsto \lambda_{\mathcal{X}}. \tag{9}$$

de l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères du tore $T(F)$ dans l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$ réguliers de drapeau dominant.
L'isomorphisme (8) dit que pour tout caractère $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ que l'on identifie avec un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \simeq & \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{X} \\ \varphi & \mapsto & 1 \otimes 1. \end{array} \tag{10}$$

4.1.3 Au paragraphe 1.1.3, on a défini un anti-automorphisme de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$ par la formule (1). La restriction de cet anti-automorphisme à l'algèbre commutative $\mathcal{D}$ est un morphisme d'algèbres injectif d'image notée $\mathcal{D}\check{}$. On dira d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{D}\check{} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ qui à l'indéterminée q associe 0 que c'est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}\check{}$.

Soit $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. On le considère comme un caractère de $\mathcal{D}$ et l'on note $\mathcal{X}\check{}$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}\check{}$ qu'il définit par composition avec l'isomorphisme $\mathcal{D}\check{} \to \mathcal{D}$. Nous reprenons les notations du paragraphe 1.1.

Proposition 7 *On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}\check{} \otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind^G_{I(1)} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X} \\ 1 \otimes \mathbf{1}_{I(1)} & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} \end{array} \tag{11}$$

Preuve Notons $\mathcal{D}_0$ la sous-algèbre de $\mathcal{D}$ engendrée par les éléments T_x, pour x parcourant l'ensemble X_{dom} des éléments dominants de X, et $\mathcal{D}_0\check{}$ son image dans $\mathcal{D}\check{}$.

Soit $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini. Le théorème 4.11 de (Vignéras, 2004) dit que l'on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}}\, ind_I^G\chi &\longrightarrow \mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X} \\ 1\otimes f_{I,\chi} &\longmapsto f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Il nous suffit donc de prouver que l'identification $1\otimes f_{I,\chi} \mapsto 1\otimes \mathbf{1}_{I(1)}$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules entre $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}}\, ind_I^G\chi$ et $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}\check{}}\, ind_{I(1)}^G 1$.

- Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $ind_I^G\chi$ s'injecte dans $ind_{I(1)}^G 1$ comme le montre la décomposition (3). Cette injection induit un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_I^G\chi \to \mathcal{X}\check{} \otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1$ qui se factorise par $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$ car $\mathcal{D}_0\check{}$ est incluse dans $\mathcal{D}\check{}$. On note $\mathcal{I}$ le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules obtenu.
- La projection $ind_{I(1)}^G 1 \twoheadrightarrow ind_I^G\chi$ induit, quant à elle, un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_{I(1)}^G 1 \to \mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$. Montrons que ce dernier se factorise par $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1$ en un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules que l'on notera $\mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{D}\check{}$ est engendrée par $\mathcal{D}_0\check{}$ et les éléments T_t, $t\in T(\mathbb{F}_q)$, il suffit, pour s'en assurer, de montrer que pour $f\in ind_{I(1)}^G 1$ et $t\in T(\mathbb{F}_q)$, les éléments $T_t f$ et $\mathcal{X}\check{}(T_t)\, f$ ont la même image dans $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$.
  Nous avons appelé ϵ_χ l'élément de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G 1 \twoheadrightarrow ind_I^G\chi$. Ainsi, l'image de $\mathcal{X}\check{}(T_t)\, f$ dans $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$ est
  $$1\otimes \mathcal{X}\check{}(T_t)\,\epsilon_\chi f = 1\otimes \mathcal{X}(t^{-1})\epsilon_\chi f.$$
  D'autre part, on a montré que pour tout $t\in T(\mathbb{F}_q)$, $\epsilon_\chi(T_t) = \chi(t^{-1})\epsilon_\chi$ (lemme 1), donc l'image de $T_t f$ dans $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$ est égale à
  $$1\otimes \epsilon_\chi(T_t f) = 1\otimes(\epsilon_\chi T_t)f = 1\otimes \chi(t^{-1})\epsilon_\chi f.$$
  Or χ est la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini, donc ces deux images coïncident.
- Il est clair que la composée $\mathcal{P}\circ\mathcal{I}$ est l'identité sur $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}_0\check{}} ind_I^G\chi$.
  Soit f un élément de l'induite compacte $ind_{I(1)}^G 1$. Sa projection dans $ind_I^G\chi$ est égale à $\epsilon_\chi f$ ou encore, en recourant à la forme de ϵ_χ donnée par le lemme 1, à $(-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)T_t f$.
  Ainsi, l'image de $\mathcal{P}(1\otimes f) = 1\otimes\epsilon_\chi f$ par $\mathcal{I}$ est l'élément de $\mathcal{X}\check{} \otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1$ égal à
  $$(-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)\otimes T_t f = (-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)\mathcal{X}\check{}(T_t)\otimes f = (-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t^{-1})\otimes f = 1\otimes f,$$
  et la composée $\mathcal{I}\circ\mathcal{P}$ est égale à l'identité sur $\mathcal{X}\check{} \otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1$. $\square$

Par passage aux $I(1)$-invariants, l'isomorphisme (11) donne un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite. Le sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite de $(\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1)^{I(1)}$ engendré par $1\otimes\mathbf{1}_{I(1)}$ est non nul et est égal à l'image de l'application naturelle $\mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}\check{}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \mathcal{X}\check{}\otimes_{\mathcal{D}\check{}} ind_{I(1)}^G 1$. On a donc un morphisme non nul de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite

$$\mathcal{X}^{\tilde{}} \otimes_{\mathcal{D}^{\tilde{}}} \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow (\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X})^{I(1)}.$$

L'anti-isomorphisme (1) permet de passer des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite aux $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à gauche. On vérifie sans difficulté que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche correspondant à $\mathcal{X}^{\tilde{}} \otimes_{\mathcal{D}^{\tilde{}}} \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ n'est autre que $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{X}$. Or, ce dernier est isomorphe à $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ comme le montre l'isomorphisme (10). Ainsi, on a un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules non nul

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & [(\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \\ \varphi & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}, \end{array} \tag{13}$$

où φ désigne le générateur canonique du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Corollaire 4 *Supposons que $\lambda_{\mathcal{X}}$ et ses conjugués sous l'action de W_0 induisent des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards isomorphes. Alors la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible.*

Preuve Sous les hypothèses de la proposition, un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est quotient de chacun des modules standards induits par les conjugués de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Puisque $\lambda_{\mathcal{X}}$ est un caractère régulier, il est distinct de chacun de ses conjugués de sorte qu'un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est de dimension supérieure ou égale à $|W_0|$. De plus, si l'on a l'égalité, alors ce quotient est irréductible.
On rappelle que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|W_0|$. L'existence du morphisme non nul (13) donne celle d'un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ s'injectant dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$. Par argument de dimension, ce quotient de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est de dimension égale à $|W_0|$, est irréductible comme $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module, et est isomorphe à $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$.

Ainsi, l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X}$ est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite irréductible. Or le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{Ind}^G_{B(F)} \mathcal{X}$ est engendré par l'élément $I(1)$-invariant $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ comme le montre l'isomorphisme (11). On conclut alors qu'il est irréductible grâce au critère d'irréductibilité (proposition 1). $\square$

4.2 Entrelacements entre les modules standards réguliers. Fixons $i \in \{1, ..., n-1\}$ et un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$. On suppose que λ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 *Le drapeau de λ possède un élément $I \subset \{1, ..., n\}$ qui contient $i+1$ et ne* *contient pas i, c'est-à-dire un élément de la forme*

$$I = I_0 \cup \{i+1\}, \quad avec\ I_0 \subset \{1,...,n\}, \quad tel\ que\ i \notin I_0. \tag{14}$$

On pose alors $\beta_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_{I_0})\lambda(E_{I_0\cup\{i,i+1\}})(\lambda(E_{I_0\cup\{i+1\}}))^{-1}$.

4.2.1 Discutons du statut de l'hypothèse 1.

Notons tout d'abord qu'elle n'est pas vraiment restrictive, puisque si λ ne la vérifie pas, alors son conjugué $s_i.\lambda$ la vérifie. En effet, si λ ne vérifie pas l'hypothèse, c'est que tout élément de son drapeau contenant $i+1$ contient aussi i. On note alors I l'élément minimal du drapeau de λ qui contient i. L'ensemble $I_0 \subsetneq I$ précédant I dans le drapeau de λ ne contient pas i par minimalité de I, donc il ne contient pas non plus $i+1$. Puisque le drapeau de λ est régulier, I et I_0 diffèrent d'un seul élément, donc $I = I_0 \cup \{i\}$, avec $i, i+1 \notin I_0$. L'image $I_0 \cup \{i+1\}$ de I par la permutation s_i ne contient pas i et appartient au drapeau de $s_i.\lambda$

Remarquons de plus que λ est de drapeau dominant si et seulement s'il vérifie l'hypothèse 1 pour tout $i \in \{1,...,n-1\}$ auquel cas, pour chaque i, il y a un unique élément de la forme (14) dans le drapeau de λ et c'est $\{i+1,...,n\}$. En effet, si λ vérifie l'hypothèse 1 pour tout $i \in \{1,...,n-1\}$, on note I_{i+1} l'élément du drapeau de λ minimal contenant $i+1$. Alors, i n'appartient pas à I_{i+1} par l'hypothèse 1. On en déduit que I_i n'est pas inclus dans I_{i+1} donc $I_{i+1} \subsetneq I_i$ et le drapeau de λ est $\emptyset \subsetneq I_n \subsetneq I_{n-1} ... \subsetneq I_1 = \{1,...,n\}$. Ainsi, $I_{i+1} = \{i+1,...,n\}$ et le drapeau de λ est dominant.

Lemme 4 *La valeur de $\beta_{i,I}(\lambda)$ est nulle si et seulement si le drapeau de λ possède un élément de la forme (14) qui est distinct de I.*

Preuve Dire que $\lambda(E_{I_0}) = 0$ signifie que l'élément $J \subsetneq I$ précédant $I = I_0 \cup \{i+1\}$ dans le drapeau de λ n'est pas I_0. Le drapeau étant régulier, I et J diffèrent d'un seul élément, qui n'est donc pas $i+1$: l'élément J appartenant au drapeau de λ est donc de la forme $J = J_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin J_0$.

Dire que $\lambda(E_{I_0\cup\{i,i+1\}}) = \lambda(E_{I\cup\{i\}}) = 0$ signifie que l'élément K, $I \subsetneq K$, suivant I dans le drapeau de λ n'est pas $I \cup \{i\}$. Le drapeau étant régulier, I et K diffèrent d'un seul élément, qui n'est donc pas i : l'élément K appartenant au drapeau de λ est de la forme $K = K_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin K_0$. $\square$

4.2.2 Les deux lemmes suivants seront démontrés au paragraphe 4.4 . On est toujours sous l'hypothèse 1, c'est-à-dire qu'il existe un élément noté I du drapeau de λ qui contient $i+1$ et ne contient pas i. On note σ_i l'élément de $\mathcal{A}^{(1)}$ défini par la relation (2) tel que $T^*_{s_i} = T_{s_i} + \sigma_i$.

Lemme 5 *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.*

- *Si $m \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ, alors $T^*_{s_i}m$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$.*

– *Si $m' \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$, alors $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ.*

On désigne par $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ le caractère du tore fini défini par $\chi(t) := \lambda(T_t)$, pour $t \in T(\mathbb{F}_q)$. On pose

$$\begin{cases} \alpha_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_I) \text{ si } s_i\chi \neq \chi, \\ \alpha_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda) \text{ si } s_i\chi = \chi. \end{cases}$$

Lemme 6 *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.*

– *Si $m \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ, alors $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)T^*_{s_i}m = \alpha_{i,I}(\lambda)m$.*
– *Si $m' \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$, alors $T^*_{s_i}(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m' = \alpha_{i,I}(\lambda)m'$*

Supposons que λ vérifie de plus l'une des deux hypothèses suivantes.

Hypothèse 2 *$s_i\chi \neq \chi$.*

Hypothèse 3 *$s_i\chi = \chi$ et $\beta_{i,I}(\lambda) \neq \lambda(E_I)$.*

Sous chacune de ces hypothèses, $\alpha_{i,I}(\lambda)$ est un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a le résultat :

Proposition 8 *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(s_i.\lambda)$ sont isomorphes.*

Preuve de la proposition Par la propriété universelle des modules standards, le lemme 5 permet de construire des morphismes de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $I(s_i.\lambda) \to I(\lambda)$ et $I(\lambda) \to I(s_i.\lambda)$: notant φ (resp. φ_i) le générateur canonique de $I(\lambda)$ (resp. $I(s_i.\lambda)$), le premier est l'unique morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules qui à φ_i associe $T^*_{s_i}\varphi$, le second, l'unique morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules qui à φ associe $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)\varphi_i$. Le lemme 6 dit que la composée de ces deux morphismes est égale à l'homothétie de rapport $\alpha_{i,I}(\lambda)$. Puisque l'on est sous l'une des hypothèses 2 ou 3, le rapport est non nul donc ces morphismes sont des isomorphismes. □

Remarque 6 Dans le cas particulier où le drapeau de λ est dominant, nous précisons la signification des hypothèses 2 et 3. Grâce à la correspondance (9), un tel λ provient d'un caractère du tore déployé $T(F)$: il existe $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ tel que $\lambda = \lambda_{\mathcal{X}}$. Le caractère $\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse 1 puisque son drapeau contient l'élément $I = \{i+1, ..., n\}$. Par définition, la valeur de $\lambda_{\mathcal{X}}$ en E_I est égale à $\lambda_{\mathcal{X}}(E_I) = \mathcal{X}_{i+1}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi)$. Le calcul de $\beta_{i,I}(\lambda)$ montre que $\beta_{i,I}(\lambda) = \lambda_{\mathcal{X}}(E_I)\mathcal{X}_i(\pi)(\mathcal{X}_{i+1}(\pi))^{-1}$.
Le caractère $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\chi(t) = \lambda_{\mathcal{X}}(T_t)$ pour tout $t \in \mathbb{F}_q$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini. L'hypothèse 2 signifie donc que les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{X}_{i+1}$ diffèrent par leur restriction au groupe fini $\mathbb{F}_q^*$. L'hypothèse 3 signifie que $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{X}_{i+1}$ coïncident sur $\mathbb{F}_q^*$ mais diffèrent par leurs valeurs en l'uniformisante π.

Ainsi, d'après la proposition 8 on a : si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$ alors les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ et $I(s_i.\lambda_{\mathcal{X}})$ sont isomorphes.

4.3 Preuve du critère d'irréductibilité pour les séries principales.

Fixons $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère du tore déployé $T(F)$ tel que pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a

$$\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}.$$

Proposition 9 *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est isomorphe au module standard induit par tout caractère conjugué de $\lambda_{\mathcal{X}}$ sous l'action de W_0.*

Corollaire 5 *La série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible.*

Le corollaire est la condition suffisante d'irréductibilité pour la série principale induite par $\mathcal{X}$ annoncée par le théorème 4. Il s'obtient à l'aide du corollaire 4.

Preuve de la proposition Soit $\mu : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère conjugué de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Soit $i \in \{1, ..., n-1\}$. Nous allons montrer que les caractères μ et $s_i.\mu$ induisent des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules isomorphes. Puisque W_0 est engendré par les transpositions, on aura démontré la proposition.

D'après le paragraphe 4.2.1, on peut, quitte à échanger μ et $s_i.\mu$, considérer que μ vérifie l'hypothèse 1 : on note $I = I_0 \cup \{i+1\}$ un élément du drapeau de μ qui contient $i+1$ et ne contient pas i.

- Si μ vérifie l'hypothèse 2, alors on peut appliquer la proposition 8 et $I(s_i.\mu)$ et $I(\mu)$ sont isomorphes.
- Si μ ne vérifie pas l'hypothèse 2, cela signifie que $s_i w\chi = w\chi$, où χ désigne la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini et où w désigne l'élément de W_0 tel que $\mu = w.\lambda_{\mathcal{X}}$. Assurons nous que μ vérifie l'hypothèse 3. D'après la proposition 8, $I(s_i.\mu)$ et $I(\mu)$ seront dès lors isomorphes.
  - Si $\beta_{i,I}(\mu) = 0$, alors $\beta_{i,I}(\mu) \neq \mu(E_I)$, donc l'hypothèse 3 est vérifiée.
  - Sinon, c'est que I_0 et $I_0 \cup \{i, i+1\}$ appartiennent au drapeau de μ. Or, le drapeau de μ, image par w du drapeau de $\lambda_{\mathcal{X}}$ régulier et dominant, est :

    $$\emptyset \subsetneq \{w(n)\}, \subsetneq \{w(n),\, w(n-1)\}, \subsetneq ..., \subsetneq \{w(n), ..., w(2)\} \subsetneq \{w(n), ..., w(2), w(1)\}.$$

    Notant $k-1$, k, $k+1$ les cardinaux respectifs de I_0, $I = I_0 \cup \{i+1\}$, et $I_0 \cup \{i, i+1\}$ avec $k \in \{1, ..., n-1\}$, on a donc nécessairement

$$\begin{aligned} I_0 &= \{w(n-k+2), ..., w(n)\} \text{ si } k \geq 2,\ \ I_0 = \emptyset \text{ si } k = 1, \\ I_0 \cup \{i+1\} &= \{w(n-k+1), ..., w(n)\}, \\ I_0 \cup \{i, i+1\} &= \{w(n-k), ..., w(n)\}, \end{aligned} \tag{15}$$

ce qui nous renseigne tout d'abord sur la transposition $w^{-1}s_iw$: il apparaît en effet que $i+1 = w(n-k+1)$ et $i = w(n-k)$. Par conséquent, $w^{-1}s_iw$ est la transposition qui échange $n-k$ et $n-k+1$. Autrement dit, l'égalité $s_iw\chi = w\chi$ se traduit par la coïncidence de $\mathcal{X}_{n-k}$ et $\mathcal{X}_{n-k+1}$ sur le groupe fini $\mathbb{F}_q^*$. L'hypothèse de la proposition nous assure pourtant que ces deux caractères de F^* sont distincts : ils ne sauraient donc avoir la même valeur en l'uniformisante : on a $\mathcal{X}_{n-k}(\pi) \neq \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)$.
Par définition de λ_χ, et puisque $\mu = w.\lambda_\chi$, les égalités (15) donnent aussi :

$$\mu(E_{I_0}) = \mathcal{X}_{n-k+2}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi) \text{ si } k \geq 2, \ \mu(E_{I_0}) = 1 \text{ si } k = 1,$$

$$\mu(E_{I_0\cup\{i+1\}}) = \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi),$$

$$\mu(E_{I_0\cup\{i,i+1\}}) = \mathcal{X}_{n-k}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi).$$

Ainsi, $\beta_{i,I}(\mu)\,\mu(E_I)^{-1} = \mu(E_{I_0\cup\{i,i+1\}})\mu(E_{I_0})\mu(E_{I_0\cup\{i+1\}})^{-2} = \mathcal{X}_{n-k}(\pi)\mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)^{-1}$.
Puisque l'on s'est assuré que $\mathcal{X}_{n-k}(\pi) \neq \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)$, on a $\beta_{i,I}(\mu) \neq \mu(E_I)$ si bien que μ vérifie l'hypothèse 3. $\square$

4.4 Preuve des lemmes.

4.4.1 Nous allons d'abord montrer dans $\mathcal{H}^{(1)}$ les relations de commutation suivantes qui sont des analogues des relations de Bernstein dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$.

Soient $i \in \{1, ..., n-1\}$, $t \in T(\mathbb{F}_q)$, I_0, J_0 deux sous-ensembles de $\{1, ..., n\}$ ne contenant ni i, ni $i+1$. On pose $I := I_0 \cup \{i+1\}$.

$$T_{s_i}\sigma_i = \sigma_i T_{s_i} \tag{16}$$

$$T_t T_{s_i}^* = T_{s_i}^* T_{s_its_i}, \ \ T_t E_{x_Is_i} = E_{x_Is_i} T_{s_its_i}. \tag{17}$$

$$E_{J_0}, \ E_{J_0\cup\{i,i+1\}}, \ \text{ et } T_{s_i} \text{ commutent}; \ E_{J_0}, \ E_{J_0\cup\{i,i+1\}}, \ \text{ et } E_{x_Is_i} \text{ commutent.} \tag{18}$$

$$T_{s_i}^* E_{J_0\cup\{i+1\}} = E_{J_0\cup\{i\}} T_{s_i}, \ \ E_{J_0\cup\{i+1\}} T_{s_i}^* = T_{s_i} E_{J_0\cup\{i\}}. \tag{19}$$

On suppose de plus que $J_0 \subset I_0$ ou bien $I_0 \subset J_0$. On a alors

$$E_{J_0\cup\{i+1\}} E_{x_Is_i} = E_{x_Is_i} E_{J_0\cup\{i\}} - q^{|I_0\cup J_0|-|I_0\cap J_0|} E_{I_0\cap J_0} E_{I_0\cup J_0\cup\{i,i+1\}} \sigma_i. \tag{20}$$

Nous allons également établir les relations suivantes qui permettront de démontrer le lemme 6.

$$T_{s_i}^* E_{x_Is_i} = E_{I_0\cup\{i\}}, \tag{21}$$

$$E_{x_Is_i} T_{s_i} = E_{I_0\cup\{i+1\}} = E_I, \tag{22}$$

$$E_{x_Is_i} E_I = T_{s_i} E_{I_0} E_{I_0\cup\{i,i+1\}}. \tag{23}$$

Montrons les relations (16),(17), ..., (23). Dans $\mathcal{H}^{(1)}$, nous connaissons les relations de tresses du théorème 1, Nous savons aussi que l'algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ est commutative et on y dispose de la relation (5). Si l'on étend les scalaires à $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$, on dispose de plus des relations de Bernstein données par (Vignéras, 2005, Proposition 5) : dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ on a

(a) si $j \in \{1, ..., n\}$, $j \neq i, i+1$, alors T_{s_i} et $\theta^{(1)}_{x_j}$ commutent ;
(b) $\theta^{(1)}_{x_i} T_{s_i} = T^*_{s_i} \theta^{(1)}_{x_{i+1}}$;
(c) $\theta^{(1)}_{x_{i+1}} T^*_{s_i} = T_{s_i} \theta^{(1)}_{x_i}$.

Ce sont là les ingrédients de la preuve des relations de commutation. Donnons en les détails.

(16) : Cette égalité s'obtient en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ où l'élément $T^*_{s_i} = T_{s_i} + \sigma_i$ est égal à $qT^{-1}_{s_i}$.

(17) : L'élément t est de longueur nulle dans $W^{(1)}$. Des relations de tresses, on déduit donc que $T_t T_{s_i} = T_{ts_i} = T_{s_i} T_{s_i t s_i}$. Les relations s'obtiennent dès lors en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ dans laquelle, d'une part $T^*_{s_i} = qT^{-1}_{s_i}$ et d'autre part, par définition des éléments de la base de Bernstein entière, $E_{x_I s_i}$ s'écrit comme le produit de T_{s_i} et d'un élément de l'algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$.

(18), (19) : Elles s'obtiennent en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ et en appliquant les relations de Bernstein (a), (b), (c). Par exemple, pour (18) : l'élément $E_{J_0} \in \mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ est proportionnel à un produit de θ_{x_j}, avec $j \neq i, i+1$. Du fait de la relation de Bernstein (a) , E_{J_0} et T_{s_i} commutent. De plus, on remarque, à l'aide de (b) et (c), que $\theta^{(1)}_{x_{i+1}} \theta^{(1)}_{x_i} T_{s_i} = \theta^{(1)}_{x_{i+1}} T^*_{s_i} \theta^{(1)}_{x_{i+1}} = T_{s_i} \theta^{(1)}_{x_i} \theta^{(1)}_{x_{i+1}}$. Ainsi, $E_{J_0 \cup \{i,i+1\}}$ et T_{s_i} commutent.
Enfin, puisque $E_{x_I s_i}$ le produit de T_{s_i} et d'un élément de l'algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on en déduit que E_{J_0}, $E_{J_0 \cup \{i,i+1\}}$ et $E_{x_I s_i}$ commutent.

(20) : Puisque $i+1 \in I$ et $i \notin I$, on a $\ell(x_I s_i) = \ell(x_I) - 1$ (Vignéras, 2006, Appendice). De plus, la longueur de x_I ne dépend que du cardinal de I, c'est-à-dire que x_I et $x_{I_0 \cup \{i\}}$ ont la même longueur. On en déduit que

$$E_{x_I s_i} = q^{-1+\ell(x_I)/2} T_{s_i} \theta_{x_{I_0 \cup \{i\}}} = q^{-1} T_{s_i} E_{I_0 \cup \{i\}}.$$

On rappelle que l'on a noté σ_i l'élément de $\mathcal{A}^{(1)}$ tel que $T^*_{s_i} = T_{s_i} + \sigma_i$. On a :

$$\begin{aligned} qE_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{x_I s_i} &= E_{J_0 \cup \{i+1\}} T_{s_i} E_{I_0 \cup \{i\}} \\ &= E_{J_0 \cup \{i+1\}} (T^*_{s_i} - \sigma_i) E_{I_0 \cup \{i\}} \\ &= T_{s_i} E_{J_0 \cup \{i\}} E_{I_0 \cup \{i\}} - E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{I_0 \cup \{i\}} \sigma_i \quad \text{d'après les relations (19)} \\ &= qE_{x_I s_i} E_{J_0 \cup \{i\}} - E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{I_0 \cup \{i\}} \sigma_i. \end{aligned}$$

La relation (5) donne, puisque $I_0 \subset J_0$ ou bien $J_0 \subset I_0$,

$$E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{I_0 \cup \{i\}} = q^{1+|I_0 \cup J_0| - |I_0 \cap J_0|} E_{J_0 \cap I_0} E_{I_0 \cup J_0 \cup \{i,i+1\}}.$$

Ainsi, divisant par q, on a dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$

$$E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{x_I s_i} = E_{x_I s_i} E_{J_0 \cup \{i\}} - q^{|I_0 \cup J_0| - |I_0 \cap J_0|} E_{J_0 \cap I_0} E_{I_0 \cup J_0 \cup \{i,i+1\}} \sigma_i$$

qui est une égalité dans $\mathcal{H}^{(1)}$: c'est la relation (20).

(21) : L'égalité $E_{x_I s_i} = q^{-1} T_{s_i} E_{I_0 \cup \{i\}}$ donne la relation (21) en multipliant à gauche par $T^*_{s_i}$ car $T^*_{s_i} T_{s_i} = q$.
(22) : Grâce à la relation (19), on a $E_{x_I s_i} = q^{-1} E_{I_0 \cup \{i+1\}} T^*_{s_i}$, ce qui donne la relation (22) en multipliant à droite par T_{s_i}.
(23) : D'après la relation (5), $E_{I_0 \cup \{i\}} E_{I_0 \cup \{i+1\}} = q E_{I_0} E_{I_0 \cup \{i,i+1\}}$. Ainsi,

$$E_{x_I s_i} E_{I_0 \cup \{i+1\}} = q^{-1} T_{s_i} E_{I_0 \cup \{i\}} E_{I_0 \cup \{i+1\}} = T_{s_i} E_{I_0} E_{I_0 \cup \{i,i+1\}}.$$

4.4.2 Preuve du lemme 5 Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère régulier et $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to {\overline{\mathbb{F}}_p}^*$ le caractère défini par $\chi(t) := \lambda(T_t)$, pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$. Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.

Remarque 7 Rappelons que l'élément σ_i de $\mathcal{A}^{(1)}$ est égal à $\sigma_i = -T_{\delta_{s_i}} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbb{F}_q)} T_t$. Ainsi, si $m \in M$ est un élément sur lequel $\mathcal{A}^{(1)}$ agit par le caractère λ, on a $\sigma_i m = \chi(\delta_{s_i}) m$ si $s_i \chi = \chi$ et $\sigma_i m = 0$ si $s_i \chi \neq \chi$.

On se place sous l'hypothèse 1 et l'on note I un élément du drapeau de λ de la forme $I = I_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin I_0$. On se donne un élément $m \in M$ sur lequel $\mathcal{A}^{(1)}$ agit par le caractère λ. Nous voulons démontrer que $T^*_{s_i} m$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$. D'après la remarque 5, il suffit pour cela de démontrer que
1) pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, $T_t T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(T_t) T^*_{s_i} m$.
2) pour tout J appartenant au drapeau de $s_i.\lambda$, $E_J T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(E_J) T^*_{s_i} m$.

Le point 1) est une conséquence de la première relation de commutation (17). Soit J un élément du drapeau de $s_i.\lambda$. Puisque $I_0 \cup \{i\}$ appartient aussi au drapeau de $s_i.\lambda$, et que $i+1 \notin I_0$, cela signifie que si $i+1$ appartient à J alors i appartient à J.

Si l'ensemble J est fixé par l'action de s_i, le point 2) découle des relations (18).
Sinon, c'est que i appartient à J et $i+1$ n'appartient pas à J. On pose $J = J_0 \cup \{i\}$ avec $i+1 \notin J_0$, et on applique les relations (19) :

$$E_{J_0 \cup \{i\}} T^*_{s_i} = E_{J_0 \cup \{i\}} T_{s_i} + \sigma_i E_{J_0 \cup \{i\}} = T^*_{s_i} E_{J_0 \cup \{i+1\}} + \sigma_i E_{J_0 \cup \{i\}}.$$

Or, $J_0 \cup \{i\}$ n'est pas dans le drapeau de λ puisqu'il ne contient pas I et n'est pas inclus dans I, donc $E_{J_0 \cup \{i\}} m = 0$. Ainsi,

$$E_{J_0 \cup \{i\}} T^*_{s_i} m = T^*_{s_i} E_{J_0 \cup \{i+1\}} m = \lambda(E_{J_0 \cup \{i+1\}}) T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(E_{J_0 \cup \{i\}}) T^*_{s_i} m.$$

Montrons maintenant la seconde assertion du lemme 5. Soit $m' \in M$ que l'on suppose propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$. Nous voulons démontrer que $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m'$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ. Comme précédemment, il suffit pour cela de démontrer que
1) pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, $T_t (E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m' = \lambda(T_t)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m'$.
2) pour J appartenant au drapeau de λ, $E_J (E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m' = \lambda(E_J)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m'$.

Le point 1) est une conséquence de la deuxième relation de commutation (17) et de la remarque 7 appliquée à $s_i.\lambda$ et m'. Soit J un élément du drapeau de λ. Puisque $I = I_0 \cup \{i+1\}$ appartient aussi au drapeau de λ, et que $i \notin I_0$, cela signifie que si i appartient à J alors $i+1$ appartient à J.

Si J est fixé par l'action de s_i, le point 2) découle de la relation (18).
Sinon, c'est que $i+1$ appartient à J et i n'appartient pas à J. On note alors $J = J_0 \cup \{i+1\}$, avec $i \notin J_0$. On a $J_0 \subset I_0$ ou bien $I_0 \subset J_0$ car J et I sont dans le drapeau de λ. D'autre part $J_0 \cup \{i+1\}$ n'appartient pas au drapeau de $s_i.\lambda$. On a donc $E_{J_0\cup\{i+1\}}m' = 0$, et l'on doit démontrer que

$$E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{x_I s_i}m' = \lambda(E_{J_0\cup\{i+1\}})(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'.$$

– Si $I_0 \neq J_0$, le drapeau de λ possède deux éléments distincts qui contiennent $i+1$ et ne contiennent pas i. D'après le lemme 4, cela signifie que $\beta_{i,I}(\lambda) = 0$. D'autre part, d'après la relation (20), on a, puisque $|I_0 \cup J_0| > |I_0 \cap J_0|$,

$$E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{x_I s_i}m' = E_{x_I s_i}E_{J_0\cup\{i\}}m' = (s_i.\lambda)(E_{J_0\cup\{i\}})E_{x_I s_i}m' = \lambda(E_{J_0\cup\{i+1\}})E_{x_I s_i}m'.$$

– Si $I_0 = J_0$, alors $J_0 \cup \{i+1\} = I$ et la relation (20) donne

$$E_I E_{x_I s_i}m' = E_{x_I s_i}E_{I_0\cup\{i\}}m' - E_{I_0}E_{I_0\cup\{i,i+1\}}\sigma_i m', \text{ c'est-à-dire}$$

$$E_I E_{x_I s_i}m' = \lambda(E_I)E_{x_I s_i}m' - \lambda(E_I)\beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i m' = \lambda(E_I)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'.$$

4.4.3 Preuve du lemme 6 Nous conservons les éléments $m, m' \in M$ introduits au paragraphe précédent. Sachant que $E_I m = \lambda(E_I)m$ et que $\lambda(E_I) \neq 0$, la relation (23) dit que $E_{x_I s_i}m = \beta_{i,I}(\lambda)T_{s_i}m$, tandis que la relation (22) donne $E_{x_I s_i}T_{s_i}m = \lambda(E_I)m$. Ainsi, $E_{x_I s_i}T^*_{s_i}m = (\lambda(E_I) + \beta_{i,I}(\lambda)T_{s_i}\sigma_i)m$. De plus, $\beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i T^*_{s_i}m = (\beta_{i,I}(\lambda)T_{s_i}\sigma_i + \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2)m$, car T_{s_i} et σ_i commutent. D'où $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)T^*_{s_i}m = (\lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2)m$.

Si $s_i\chi \neq \chi$ alors $\sigma_i m = 0$ d'après la remarque 7 et $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)T^*_{s_i}m = \lambda(E_I)m = \alpha_{i,I}(\lambda)m$. Si $s_i\chi = \chi$ alors $\sigma_i^2 m = \chi(\delta_{s_i})^2 m = m$ d'après la remarque 7 et car $\delta_{s_i}^2 = 1$. Ainsi, $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)T^*_{s_i}m = (\lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda))m = \alpha_{i,I}(\lambda)m$.

On a ainsi démontré la première assertion du lemme 6. La seconde assertion se démontre de même, en utilisant les relations (21) et (23).

5 Semi-simplification de l'espace des $I(1)$-invariants d'une série principale non ramifiée de $\mathrm{GL}_3(F)$.

Dans le but d'établir le critère d'irréductibilité pour les séries principales, nous avons établi un lien entre certains $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers et l'espace des $I(1)$-invariants des séries principales, puis nous avons décrit des entrelacements entre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers. Nous exploitons ici ces mêmes résultats afin de donner la semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite des $I(1)$-invariants d'une série principale en supposant que $n = 3$. Nous nous contenterons de traiter le cas d'une série principale non ramifiée pour alléger les discussions, bien que le cas général se traite avec les mêmes arguments.

Dans toute cette section, on suppose que $n = 3$ et l'on se donne un caractère du tore déployé $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \mathcal{X}_3 : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. On note $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ sa restriction au tore fini. A partir du paragraphe 5.4, nous supposerons que χ est le caractère trivial.

5.1 Nous reprenons les notations du paragraphe 1.3.

Proposition 10 *L'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.*

Preuve On rappelle qu'une base de l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est l'ensemble

$$\{f_{B(F)wI(1),\mathcal{X}},\ \ w \in W_0\}. \tag{24}$$

Décrivons l'action à droite de certains éléments de la base de Iwahori-Matsumoto de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ sur l'élément $I(1)$-invariant $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

a) L'élément ω normalise $I(1)$. Ainsi, l'action à droite de T_ω sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ est $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_\omega = \omega^{-1}.f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. C'est donc un élément non nul, $I(1)$-invariant de support $B(F)I(1)\omega = B(F)\omega I(1)$. On écrit l'élément ω comme le produit de la diagonale x_3 par le cycle s_2s_1 pour vérifier que $B(F)\omega I(1) = B(F)s_2s_1I(1)$. On en déduit que $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_\omega$ est proportionnel à l'élément $I(1)$-invariant $f_{B_1(F)s_2s_1I(1)}$ de support $B_1(F)s_2s_1I(1)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en s_2s_1. Ainsi, ce dernier appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. De même, l'étude de l'action de T_{ω^2} montre que l'élément $f_{B(F)s_1s_2I(1),\mathcal{X}}$ appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

b) Etudions l'action de T_{s_1} à droite sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. Elle donne un élément $I(1)$-invariant de support $B(F)I(1)s_1I(1)$.
Si un élément w de $\mathfrak{S}_3$ appartient à $B(F)I(1)s_1I(1)$, alors, c'est qu'il existe un élément du sous-groupe de Borel $b \in B(F)$ à cœfficients entiers et des éléments α, $\alpha' \in I(1)$ tels que $w = b\alpha s_1\alpha'$. En réduisant cette égalité modulo π et sachant que l'image dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ de $\mathfrak{S}_3$ est un système de représentants des doubles classes de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ modulo son sous-groupe de Borel $B(\mathbb{F}_q)$, on en déduit que $w = s_1$. Par conséquent, $B(F)I(1)s_1I(1) = B(F)s_1I(1)$. Ainsi, l'action de T_{s_1} à droite sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ donne un élément $I(1)$-invariant de support $B(F)s_1I(1)$. Nous allons montrer que sa valeur en s_1 est égale à $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ce qui nous assurera que cet élément est égal à $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$. Ainsi, on aura prouvé que $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$ appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

On a la décomposition (Vignéras, 2004, A.3, A.7)

$$I(1)s_1I(1) = \coprod_{x \in O_F/\pi O_F} I(1)s_1u_x \quad \text{avec } u_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il existe $x \in O_F$ tel que $s_1 \in B(F)I(1)s_1u_x$, alors il existe un élément $b \in B(F)$ à cœfficients entiers et un élément $\alpha, \in I(1)$ tels que $s_1u_xs_1 = \alpha b$. Le terme de gauche est une matrice triangulaire inférieure à cœfficients entiers, la réduction modulo π du terme de droite est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, $x \in \pi O_F$ et

$$[f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_{s_1}](s_1) = \sum_{x \in O_F/\pi O_F} f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}(s_1(s_1u_x)^{-1}) = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}(1) \;=\; 1_{\overline{\mathbb{F}}_p}.$$

c) L'étude des actions respectives de T_ω et de T_{ω^2} sur $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$, menée de façon analogue au point a), montre alors que les éléments $f_{B(F)s_1s_2s_1I(1),\mathcal{X}}$ et $f_{B(F)s_2I(1),\mathcal{X}}$ appartiennent au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. □

On note L_1 (resp. L_2) le sous groupe de Levi standard de G isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_1(F)$ (resp. $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{GL}_2(F)$) et $B_1(F)$ (resp. $B_2(F)$) le parabolique supérieur associé. Un système de représentants des doubles classes $B_1(F)\backslash G/I(1)$ (resp. $B_2(F)\backslash G/I(1)$) est donné par $\{1, s_2, s_2s_1\}$ (resp. $\{1, s_1, s_1s_2\}$). On note ρ_1 (resp. ρ_2) le caractère du sous-groupe de Levi L_1 (resp. L_2) défini par $\rho_1 = \mathcal{X}_1 \circ det \otimes \mathcal{X}_3$ (resp. $\rho_2 = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \circ det$).

Soit $i \in \{1, 2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. La série principale induite par $\mathcal{X}$ contient la représentation paraboliquement induite par ρ_i. Comme au paragraphe 1.3, on note $f_{B_iI(1),\rho_i}$ l'élément $I(1)$-invariant de support $B_iI(1)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en 1 de cette sous-représentation. Il se décompose selon la base (24) de l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$. Puisque $B_iI(1) = B(F)I(1) \cup B(F)s_iI(1)$, c'est une combinaison linéaire de $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ et $f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}}$. Or, on a $f_{B_i(F)I(1),\rho_i}(1) = 1$ et $f_{B_i(F)I(1),\rho_i}(s_i) = \rho_i(s_i) = \mathcal{X}_i(-1)$. Ainsi, et d'après la preuve de la proposition 10,

$$f_{B_i(F)I(1),\rho_i} = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} + \mathcal{X}_i(-1)f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}} = \mathcal{X}_i(-1)\, f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}}(\mathcal{X}_i(-1) + T_{s_i}). \quad (25)$$

Remarque 8 L'espace des $I(1)$-invariants de la représentation paraboliquement induite par ρ_i est de dimension 3. L'égalité (25) et la preuve de la proposition 10 montrent qu'il a pour base

$$\{f_{B_i(F)I(1),\rho_i},\;\; f_{B_i(F)I(1),\rho_i}T_\omega,\;\; f_{B_i(F)I(1),\rho_i}T_{\omega^2}.\}$$

Il est donc engendré comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite par $f_{B_i(F)I(1),\rho_i}$.

5.2 Le fait de travailler avec $n = 3$ permet de borner la dimension des modules standards grâce au lemme suivant :

Lemme 7 *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$. Le module standard induit par λ est engendré comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel par les éléments $\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)},\ \ell(w) \leq 1\}$, ou encore par l'ensemble*

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T_\omega^2\varphi,\ T_{s_i}\varphi,\ T_\omega T_{s_i}\varphi,\ T_\omega^2 T_{s_i}\varphi,\ i \in \{0,1,2\}\},$$

où φ désigne le générateur canonique du module standard induit par λ.

Preuve

a) Dans le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W}$, un élément de longueur 2 s'écrit comme le produit d'une puissance de l'élément ω de longueur nulle, et d'un élément de longueur 2 du groupe de Weyl affine. On rappelle que ce dernier est le groupe de Coxeter de système générateur $\{s_0, s_1, s_2\}$. De plus on a les relations (exemple 1),

$$\omega = s_2 s_1 x_1 = x_3 s_2 s_1,\ \ \omega^2 = s_1 s_2 x_1 x_2 = x_2 x_3 s_1 s_2,\ \ s_0 = s_1 s_2 s_1 x_1 x_3^{-1} = s_2 s_1 s_2 x_1 x_3^{-1}.$$

Un élément de longueur 2 du groupe de Weyl affine est l'un des éléments de l'ensemble $\{s_1s_2,\ s_2s_1,\ s_0s_1,\ s_1s_0,\ s_0s_2,\ s_2s_0\}$ qui s'écrit aussi, d'après les relations précédentes, $\{\omega^2(x_1x_2)^{-1},\ \omega x_1^{-1},\ \omega^2(x_2x_3)^{-1},\ \omega x_3^{-1},\ \omega x_2^{-1},\ \omega^2(x_2x_3)^{-1}\}$. C'est donc le produit d'une puissance de l'élément de longueur nulle ω et d'un élément de X. Par conséquent, un élément de longueur 2 de $W^{(1)}$ est le produit d'une puissance de l'élément de longueur nulle ω et d'un élément de $X^{(1)} = X \times T(\mathbb{F}_q)$.

b) Soient v un élément de longueur 2 de $W^{(1)}$, et $k \in \{0,1,2\}$, $x \in X^{(1)}$, avec $\ell(x) = 2$ tels que $v = \omega^k x$.
- Si $k = 0$, alors $v = x$ et $E_v = E_x$.
- Si $k = 1$, alors $v = s_2 s_1 x_1 x$. L'élément E_v est défini dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ par $E_v = T_{s_2} T_{s_1} \theta^{(1)}_{x_1} \theta^{(1)}_x$. L'exemple 1 a montré que $qT_\omega = T_{s_2} T_{s_1} \theta^{(1)}_{x_1}$, donc $E_v = qT_\omega \theta^{(1)}_x$. D'autre part, x est de longueur 2 donc $E_x = q\theta^{(1)}_x$. Ainsi, $E_v = T_\omega E_x$.
- Si $k = 2$, on a de même, $E_v = T_\omega^2 E_x$.

Dans les trois cas, l'action de l'élément E_v sur le générateur canonique φ de $I(\lambda)$ est donnée par $E_v\varphi = \lambda(E_x) T_\omega^k \varphi$. Ainsi, puisque ω est de longueur nulle, $E_v\varphi$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\ \ell(w) \leq 1\}$. Mais l'élément E_v se décompose selon la base de Iwahori-Matsumoto de $\mathcal{H}^{(1)}$: d'après (Vignéras, 2005, Proposition 7), c'est la somme de T_v et d'une combinaison linéaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}[q]$ d'éléments de type T_w, avec $w \in W^{(1)}$, $\ell(w) \leq \ell(v) - 1 = 1$. Par conséquent $T_v\varphi$ appartient lui aussi à l'espace vectoriel engendré par $\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\ \ell(w) \leq 1\}$.

c) L'algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ayant pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base les éléments de Iwahori-Matsumoto $\{T_w,\ w \in W^{(1)}\}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments

$$\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\}. \tag{26}$$

Pour prouver le lemme, il faut montrer que, dans le système générateur (26), on peut éliminer les éléments $T_w\varphi$ avec $\ell(w) \geq 2$. C'est une conséquence de l'argument suivant.

Un élément $w' \in W^{(1)}$ de longueur supérieure ou égale à 2 s'écrit $w' = w_1 v$, avec w_1, $v \in W^{(1)}$, vérifiant $\ell(w') = \ell(w_1) + \ell(v)$, et $\ell(v) = 2$. Du fait des relations de tresses, on a $T_{w'} = T_{w_1} T_v$. Ainsi, $T_{w'}\varphi = T_{w_1} T_v \varphi$ est, d'après b), une combinaison linéaire des éléments

$$\{T_{w_1} T_w \varphi,\ w \in W^{(1)} \ell(w) \leq 1\}.$$

Or, si $\ell(w) \leq 1$, le produit $T_{w_1} T_w$ est égal à une combinaison linéaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}[q]$ d'éléments de la base de Iwahori-Matsumoto correspondant à des éléments de $W^{(1)}$ de longueur inférieure ou égale à $\ell(w_1) + 1 < \ell(w')$. (C'est une conséquence classique des relations de tresses et des relations quadratiques du théorème 1). Par récurrence descendante sur la longueur de w', on montre ainsi que, du système générateur (26), on peut éliminer les $T_{w'}\varphi$ avec w' de longueur supérieure ou égale à 2.

Les éléments T_{ω^3} et T_t, $t \in T(\mathbb{F}_q)$ agissent sur φ par multiplication par un scalaire non nul. On déduit alors de ce qui précède que le module standard induit par λ est engendré comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel par les éléments

$$\{\varphi,\ T_\omega \varphi,\ T_\omega^2 \varphi,\ T_{s_i}\varphi,\ T_\omega T_{s_i}\varphi,\ T_\omega^2 T_{s_i}\varphi,\ i \in \{0,1,2\}\}.$$

□

5.3

Soit $\lambda_{\mathcal{X}} : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ le caractère régulier de drapeau dominant associé par la bijection (9) au caractère $\mathcal{X}$. On rappelle qu'il est entièrement déterminé par les données suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_{\mathcal{X}}(T_t) = \chi(t), \quad \forall t \in T(\mathbb{F}_q), \\ \lambda(E_{\{3\}}) = \mathcal{X}_3(\pi),\ \lambda(E_{\{2,3\}}) = \mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi),\ \lambda(E_{\{1,2,3\}}) = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi). \end{cases} \tag{27}$$

Lemme 8 *Le module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension* 6.

Preuve L'élément $E_{\{3\}}$ de la base de Bernstein entière correspondant à l'élément dominant $x_3 \in X$ est égal à $T_{x_3} = T_{\omega s_1 s_2} = T_\omega T_{s_1} T_{s_2}$. L'élément $E_{\{2,3\}}$ de la base de Bernstein entière correspondant à l'élément dominant $x_{\{2,3\}} \in X$ est égal à $T_{x_2 x_3} = T_{\omega^2 s_2 s_1} = T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1}$. Enfin, $E_{\{1,2,3\}}$ est égal à l'élément central inversible T_ω^3. Les relations (27) disent donc en particulier que dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ de générateur canonique φ, on a :

$$T_\omega T_{s_1} T_{s_2} \varphi = \mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{28}$$

$$T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \varphi = \mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{29}$$

$$T_\omega^3 \varphi = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{30}$$

Nous allons donner une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$. On rappelle, dans $W^{(1)}$, les relations de commutation, $s_1\omega = \omega s_2$, $s_0\omega = \omega s_1$ et $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. Multiplions la relation (28) à gauche par $T_\omega T_{s_1}$. On obtient l'égalité entre

$$T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} T_{s_2} \varphi = T_\omega^2 T_{s_1} T_{s_2} T_{s_1} \varphi = T_{s_2} T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_3(\pi) T_\omega T_{s_1} \varphi$$

qui, à l'aide de la relation (29), donne $\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)T_{s_2}\varphi = \mathcal{X}_3(\pi)T_\omega T_{s_1}\varphi$, donc

$$T_{s_2}\varphi = (\mathcal{X}_2(\pi))^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi. \tag{31}$$

Multiplions la relation (28) à gauche par $T^*_{s_0}$. On obtient, $\mathcal{X}_3(\pi)T^*_{s_0}\varphi = T^*_{s_0}T_\omega T_{s_1}T_{s_2}\varphi = T_\omega T^*_{s_1}T_{s_1}T_{s_2}\varphi = 0$ donc $T^*_{s_0}\varphi = 0$. Du fait de l'expression de $T^*_{s_0} = T_{s_0} + \sigma_0$ avec $\sigma_0 \in \mathcal{A}^{(1)}$, il apparaît que $T^*_{s_0}\varphi$ est la somme de $T_{s_0}\varphi$ et d'un élément proportionnel à φ, donc $T_{s_0}\phi$ est proportionnel à φ.

Ainsi, d'après le lemme 7, le module standard $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel engendré par $\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T^2_\omega\varphi,\ T_{s_1}\varphi,\ T_\omega T_{s_1}\varphi,\ T^2_\omega T_{s_1}\varphi\}$. Le corollaire 2 dit que $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension au moins 6, donc le système générateur que l'on vient d'exhiber est même une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$. □

Proposition 11 – *Le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules (13) défini par*

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & [(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \\ \varphi & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} \end{array}$$

est un isomorphisme.

– *Soit $i \in \{1,2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. L'image par le morphisme (13) du sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ engendré par $T^*_{s_i}\varphi$ est égale à $[(\mathrm{Ind}^G_{B_i(F)}\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$.*

Preuve La première assertion de la proposition provient des observations du paragraphe 1.3 et de la proposition 10. En effet, on y a vu que l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 et que c'est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. Le morphisme (13) est donc surjectif, et injectif par argument de dimension, grâce au lemme 8.

Soit $i \in \{1,2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. D'après la remarque 8, la série principale induite par $\mathcal{X}$ contient la sous-représentation induite par ρ_i dont l'espace des $I(1)$-invariants est un espace vectoriel de dimension 3, égal au sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite de $(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}$ engendré par

$$f_{B_i(F)I(1),\rho_i} = \mathcal{X}_i(-1)\, f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}_i(-1) + T_{s_i}).$$

D'autre part, la remarque 7 nous rappelle que, dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ on a

$$T^*_{s_i}\varphi = T_{s_i}\varphi + \sigma_i\varphi = T_{s_i}\varphi + \mathcal{X}_i(-1)\varphi = (\mathcal{X}_i(-1) + T_{s_i})\varphi.$$

Par conséquent, et puisque l'élément T_{s_i} est invariant par l'anti-automorphisme d'algèbre (1), l'image par le morphisme (13) de $T^*_{s_i}\varphi$ est égale à l'élément $\mathcal{X}_i(-1)f_{B_i(F)I(1),\rho_i}$. On en déduit la deuxième assertion de la proposition. □

Proposition 12 – *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes. Si $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$, ils sont de plus isomorphes au module standard induit par $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$.*

- *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes. Si $\mathcal{X}_2 \neq \mathcal{X}_3$, ils sont de plus isomorphes au module standard induit par $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$.*
- *Soit $i \in \{1,2\}$. Le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules suivant est bien défini*

$$\begin{aligned} F_i : I(s_i.\lambda_{\mathcal{X}}) &\longrightarrow I(\lambda_{\mathcal{X}}) \\ \varphi_i \quad &\longmapsto T^*_{s_i}\varphi, \end{aligned}$$

où φ_i désigne le générateur canonique du module standard induit par $s_i.\lambda_{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$, c'est un isomorphisme. Sinon, son image est un sous-espace vectoriel de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ de dimension 3.

Corollaire 6 *Un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard régulier est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6.*

Montrons le corollaire à l'aide de la proposition. La proposition 2 dit que les modules standards induits par $\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ (resp. $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$) ont la même dimension. La proposition 12 dit en particulier que les modules standards induits par $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ ont même dimension. Donc $\lambda_{\mathcal{X}}$ et ses conjugués induisent des modules standards de même dimension, égale à 6 d'après le lemme 8. On a démontré le corollaire car tout caractère régulier est conjugué à un caractère régulier de drapeau dominant.

Preuve de la proposition C'est une application directe des lemmes 5, 6. On rappelle que le drapeau de $\lambda_{\mathcal{X}}$ est $\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$.

Démontrons la première assertion du lemme, la seconde s'obtient de la même façon. Le caractère $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, de drapeau $\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$, vérifie l'hypothèse 1 pour $i=1$: en effet l'ensemble $\{2\}$ (qui contient $i+1$ et ne contient pas i) figure dans son drapeau. De plus, il vérifie l'hypothèse 2 ou bien l'hypothèse 3 puisque $\beta_{1,\{2\}}(s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) = 0$ car $\{1,2\}$ n'appartient pas au drapeau de $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$. D'après la proposition 8, les modules standards induits par $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes.

Supposons que $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$. Le caractère $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, de drapeau $\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$, vérifie l'hypothèse 1 pour $i=2$: en effet l'ensemble $\{1,3\}$ figure dans son drapeau. De plus, s'il ne vérifie pas l'hypothèse 2, alors c'est que $s_1s_2.\mathcal{X}$ et $s_2s_1s_2.\mathcal{X}$ coïncident sur le tore fini $T(\mathbb{F}_q)$, c'est-à-dire que $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ coïncident sur $\mathbb{F}_q^*$. Mais alors $\mathcal{X}_1(\pi) \neq \mathcal{X}_2(\pi)$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse 3 car

$$\begin{aligned} \beta_{2,\{1,3\}}(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) &= (s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1\}}))(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1,2,3\}}))(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1,3\}}))^{-1} \\ &= \mathcal{X}_3(\pi)(\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi))(\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi))^{-1} = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_3(\pi). \end{aligned}$$

Ainsi, $\beta_{2,\{1,3\}}(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) \neq \mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi) = (s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}})(E_{\{1,3\}})$. Par la proposition 8, les modules standards induits par $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_2s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont donc isomorphes.

Démontrons la troisième assertion du lemme. Soit $i \in \{1, 2\}$. Nous sommes dans le cadre de la remarque 6. Nous y avons noté que $\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse 1 de sorte que, d'après le lemme 5, le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules F_i est bien défini. Nous y avons de plus vu que si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$, alors F_i est un isomorphisme. Dans le cas contraire, la proposition 11 dit que l'image de F_i est isomorphe au $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}^G_{B_i(F)}\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$, qui est un espace vectoriel de dimension 3. $\square$

5.4 On suppose maintenant que la restriction $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^*$ de $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ au tore fini est le caractère trivial. Nous donnons la semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Remarque 9 Puisqu'on a supposé que $\mathcal{X}$ est un caractère non ramifié, l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est en fait un espace invariant sous l'action du sous-groupe d'Iwahori.
D'autre part, l'idempotent central $\epsilon_{\mathbf{1}}$ (défini au paragraphe 2.1.2) agit sur le générateur canonique φ de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ par $\epsilon_{\mathbf{1}}\varphi = \varphi$. Ainsi $\epsilon_{\mathbf{1}}$ agit comme l'identité sur le module standard $I(\lambda_{\mathcal{X}})$, qui a donc une structure de module pour l'algèbre $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ dont on a vu qu'elle est isomorphe à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de G.
Enfin, d'après la remarque 1, on a pour $i \in \{0, 1, 2\}$, $T^*_{s_i}\epsilon_{\mathbf{1}} = (T_{s_i} + 1)\epsilon_{\mathbf{1}}$ donc $T^*_{s_i}$ agit comme $T_{s_i} + 1$ sur le module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

La preuve du lemme 8 a montré qu'une base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est donnée par

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T^2_\omega\varphi,\ T_{s_1}\varphi,\ T_\omega T_{s_1}\varphi,\ T^2_\omega T_{s_1}\varphi.\} \tag{32}$$

Décrivons l'action de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ sur cette base. Suite au théorème 1, nous avons vu qu'elle est engendrée par $\{T_{s_1}, T^{\pm 1}_\omega, T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)\}$. Puisque l'élément central T^3_ω agit par multiplication par $\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)$ et que T_t agit par multiplication par 1, il nous suffit de donner l'action de T_{s_1} sur la base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$.

Les relations (28), (29), (30) et les calculs de la preuve du lemme 8 montrent que l'action de T_{s_1} sur $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} T_{s_1}.\varphi = T_{s_1}\varphi, & T_{s_1}.T_\omega\varphi = \mathcal{X}_2(\pi)^{-1}T^2_\omega T_{s_1}\varphi, & T_{s_1}.T^2_\omega\varphi = -T^2_\omega\varphi, \\ T_{s_1}.T_{s_1}\varphi = -T_{s_1}\varphi, & T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\varphi = \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\varphi\ , & T_{s_1}T^2_\omega T_{s_1}\varphi = -T^2_\omega T_{s_1}\varphi. \end{array} \tag{33}$$

Pour obtenir la semi-simplification de ce $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard, nous allons utiliser à maintes reprises l'argument suivant qui a déjà servi pour la preuve du corollaire 4 : le caractère régulier $\lambda_{\mathcal{X}}$ est distinct de chacun de ses conjugués sous l'action de $\mathfrak{S}_3$. Soient

λ et λ' deux conjugués distincts de $\lambda_{\mathfrak{X}}$. Si les modules standards qu'ils induisent sont isomorphes, alors tout quotient non nul de l'un possède un élément propre pour chacun des caractères λ et λ', il est donc de dimension supérieure ou égale à 2. Nous allons aussi utiliser le fait que le module standard induit par un conjugué de $\lambda_{\mathfrak{X}}$ est de dimension 6 (lemme 6).

- Si $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_2 \neq \mathfrak{X}_3$, la proposition 12 dit que le module standard induit par $\lambda_{\mathfrak{X}}$ est isomorphe au module standard induit par chacun des 6 conjugués distincts de $\lambda_{\mathfrak{X}}$. Puisqu'il est de dimension 6, il est donc irréductible.
- Supposons que $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_2 \neq \mathfrak{X}_3$. La proposition 12 dit que les modules standards induits par $\lambda_{\mathfrak{X}}$, $s_2.\lambda_{\mathfrak{X}}$, et $s_1s_2.\lambda_{\mathfrak{X}}$ sont isomorphes d'une part, et que les modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathfrak{X}}$ $s_2s_1.\lambda_{\mathfrak{X}}$, et $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathfrak{X}}$ sont isomorphes d'autre part. Par conséquent un quotient non nul d'un de ces modules standards est de dimension supérieure ou égale à 3 et s'il est de dimension 3 il est irréductible.

  D'après la proposition 12, l'image du morphisme F_1, qui est un quotient de $I(s_1.\lambda_{\mathfrak{X}})$, est un sous-espace de dimension 3 de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$. On en déduit que c'est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible et que c'est le seul sous-module propre de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$. Il est engendré par $\psi_1 := T^*_{s_1}\varphi$ et a pour base $\{\psi_1, T_\omega\psi_1, T_\omega\psi_1\}$. D'après les relations (33), l'action de T_{s_1} y est donnée par
  $$T_{s_1}.\psi_1 = 0,\ \ T_{s_1}.T_\omega\psi_1 = \mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\psi_1,\ \ T_{s_1}.T^2_\omega\psi_1 = -T^2_\omega T^*_{s_1}\varphi. \tag{34}$$
  Le quotient de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ par son sous-module propre est engendré par $\bar{\varphi}$ et a pour base $\{\bar{\varphi}, T_\omega\bar{\varphi}, T^2_\omega\bar{\varphi}\}$ où $\bar{\varphi}$ désigne l'image de φ dans le module quotient. L'action de T_{s_1} y est donnée par :
  $$T_{s_1}.\bar{\varphi} = -\bar{\varphi},\ \ T_{s_1}.T_\omega\bar{\varphi} = -\mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\bar{\varphi},\ \ T_{s_1}.T^2_\omega\bar{\varphi} = -T^2_\omega\bar{\varphi}. \tag{35}$$
  Grâce à la proposition 11, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:
  $$[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad (35) \quad} [(\mathrm{Ind}^G_{B_1(F)}\rho_1)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad (34) \quad} 0$$
- De même si $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3$, on montrerait que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathfrak{X}}$ a pour unique sous-module propre le sous-module engendré par $T^*_{s_2}\varphi$ et que ce dernier est de dimension 3. La remarque 9 et l'égalité (31) donnent $T^*_{s_2}\varphi = \varphi + T_{s_2}\varphi = \varphi + \mathfrak{X}_3(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$ donc le sous-module engendré par $\psi_2 := T^*_{s_2}\varphi$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\psi_2, T_\omega\psi_2, T_\omega\psi_2\}$. D'après les relations (33), l'action de T_{s_1} y est donnée par
  $$T_{s_1}.\psi_2 = (\mathfrak{X}_1(\pi)\mathfrak{X}_2(\pi))^{-1}T^2_\omega\psi_2,\ \ T_{s_1}.T_\omega\psi_2 = 0,\ \ T_{s_1}.T^2_\omega\psi_2 = -T^2_\omega\psi_2. \tag{36}$$
  Le quotient de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ par son sous-module propre est engendré par $\bar{\varphi}$ et a pour base

$\{\bar{\varphi}, T_\omega\bar{\varphi}, T_\omega^2\bar{\varphi}\}$ où $\bar{\varphi}$ désigne l'image de φ dans le module quotient. Elle vérifie $0 = T_{s_2}^*\bar{\varphi} = \bar{\varphi} + \mathcal{X}_3(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\bar{\varphi}$. L'action de T_{s_1} sur le module quotient est donnée par :

$$T_{s_1}.\bar{\varphi} = -(\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi))^{-1}T_\omega^2\bar{\varphi},\ \ T_{s_1}.T_\omega\bar{\varphi} = -T_\omega\bar{\varphi},\ \ T_{s_1}.T_\omega^2\bar{\varphi} = -T_\omega^2\bar{\varphi}. \tag{37}$$

Grâce à la proposition 11, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$-module $[(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:

$$[(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad (37) \quad} [(\mathrm{Ind}_{B_2(F)}^G\rho_2)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad (36) \quad} 0$$

- Enfin, supposons que $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3$. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, la représentation paraboliquement induite par ρ_i est une sous-représentation de la série principale induite par $\mathcal{X}$. De plus l'intersection de ces deux sous-représentations est non nulle puisqu'elle contient la sous-représentation de dimension 1 dite "des constantes" de base la fonction de support G. Par conséquent, l'intersection des espaces $I(1)$-invariants $(\mathrm{Ind}_{B_1(F)}^G\rho_1)^{I(1)}$ et $(\mathrm{Ind}_{B_2(F)}^G\rho_2)^{I(1)}$ est non nulle. Par passage aux $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$-modules à gauche, et grâce à la proposition 11 qui identifie l'image du morphisme F_i avec $[(\mathrm{Ind}_{B_i(F)}^G\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$, on en déduit que l'intersection des images de F_1 et F_2 est un sous-module non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$. D'après la proposition 12, les modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ (resp. $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$) sont isomorphes, donc un quotient de $I(s_1.\lambda_{\mathcal{X}})$ (resp. $I(s_2.\lambda_{\mathcal{X}})$) est de dimension supérieure ou égale à 2. Par conséquent, le quotient de $Im(F_1)$ (resp. $Im(F_2)$) par l'intersection $Im(F_1) \cap Im(F_2)$ est un espace de dimension 2 et est irréductible comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$-module. Ainsi, $Im(F_1) \cap Im(F_2)$ est un espace de dimension 1. De plus, la somme de $Im(F_1)$ et $Im(F_2)$ est un sous-module de dimension 5 du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Décrivons chacun des constituants irréductibles du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ que nous venons d'exhiber. Pour cela, calculons la décomposition de l'élément

$$\mathcal{K} := T_{s_2}^*T_{s_1}^*T_{s_2}^*\varphi = T_{s_1}^*T_{s_2}^*T_{s_1}^*\varphi$$

dans la base (32) de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ à l'aide des relations (33) et du fait que $T_{s_2} = T_\omega^{-1}T_{s_1}T_\omega$:

$$\mathcal{K} = \mathcal{X}_1(\pi)^2\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\varphi + T_\omega^2\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)^2T_{s_1}\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega T_{s_1}\varphi + T_\omega^2T_{s_1}\varphi.$$

C'est donc un élément non nul. Il appartient de plus à l'intersection de $Im(F_1)$ et de $Im(F_2)$ dont on sait maintenant que c'est un espace de dimension 1. C'en est donc une base. (C'est une base de la sous représentation "des constantes"). Les actions de T_ω et T_{s_1} sur $\mathcal{K}$ sont données par

$$T_\omega\mathcal{K} = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{K},\ \ T_{s_1}\mathcal{K} = 0,\ \ \text{car } T_{s_i}T_{s_i}^* = 0. \tag{38}$$

On note encore $\psi_1 = T^*_{s_1}\varphi$. On remarque que $\mathcal{K} = \mathfrak{X}_1(\pi)^2\psi_1 + \mathfrak{X}_1(\pi)T_\omega\psi_1 + T^2_\omega\psi_1$. Une base du quotient de $Im(F_1)$ par son sous-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{K}$ est $\{\bar{\psi}_1, T_\omega\bar{\psi}_1\}$ où $\bar{\psi}_1$ désigne l'image de ψ_1 dans le module quotient. Grâce aux relations (34) qui sont encore valables ici puisque $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$, les actions de T_{s_1} et de T_ω y sont données par

$$T^2_\omega\bar{\psi}_1 = -\mathfrak{X}_1(\pi)^2\bar{\psi}_1 - \mathfrak{X}_1(\pi)T_\omega\bar{\psi}_1,\ \ T_{s_1}\bar{\psi}_1 = 0,\ \ T_{s_1}T_\omega\bar{\psi}_1 = -\mathfrak{X}_1(\pi)\bar{\psi}_1 - T_\omega\bar{\psi}_1. \tag{39}$$

Notons $\psi_2 := T^*_{s_2}\varphi$. Grâce à la relation (31) on l'écrit $\psi_2 = \varphi + \mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$. On remarque que $\mathcal{K} = \mathfrak{X}_1(\pi)^2\psi_2 + \mathfrak{X}_1(\pi)T_\omega\psi_2 + T^2_\omega\psi_2$. Une base du quotient de $Im(F_2)$ par son sous-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{K}$ est donnée par $\{\bar{\psi}_2, T_\omega\bar{\psi}_2\}$ où $\bar{\psi}_2$ désigne l'image de ψ_2 dans le module quotient. Grâce aux relations (36) qui sont encore valables car $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3$, les actions de T_{s_1} et de T_ω y sont données par

$$T^2_\omega\bar{\psi}_2 = -\mathfrak{X}_1(\pi)^2\psi_2 - \mathfrak{X}_1(\pi)T_\omega\bar{\psi}_2,\ \ T_{s_1}\bar{\psi}_2 = -\bar{\psi}_2 - \mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega\bar{\psi}_2,\ \ T_{s_1}T_\omega\bar{\psi}_2 = 0. \tag{40}$$

Enfin notant $\bar{\varphi}$ l'image de φ dans le quotient de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ par le sous-module $Im(F_1) + Im(F_2)$, les égalités $T^*_{s_1}\varphi = T_{s_1}\varphi + \varphi$ et $T^*_{s_2}\varphi = \varphi + \mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$ donnent $0 = T_{s_1}\bar{\varphi} + \bar{\varphi}$ et $0 = \bar{\varphi} - \mathfrak{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega\varphi$. Donc les actions de T_{s_1} et de T_ω sur $\bar{\varphi}$ sont données par

$$T_\omega\bar{\varphi} = \mathfrak{X}_1(\pi)\bar{\varphi},\ \ T_{s_1}\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}. \tag{41}$$

Grâce à la proposition 11, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & {[(\mathrm{Ind}^G_{B_2(F)}\rho_2)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[dr, "(40)"] & & \\
{[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[r, "(41)"] & {} \arrow[ur, "(39)"] \arrow[dr, "(40)"'] & & \overline{\mathbb{F}}_p\mathcal{K} \arrow[r, "(38)"] & 0 \\
 & & {[(\mathrm{Ind}^G_{B_1(F)}\rho_1)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[ur, "(39)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Références

Barthel, L. ; Livné, R. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. 75, no. 2, 261-292 (1994).

Barthel, L. ; Livné, R. Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory 55 (1995).

Breuil, C. Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compositio Math. 138, no. 2, 165–188 (2003).

Bruhat, F. ; Tits, J. Groupes réductifs sur un corps local. Inst. Hautes Études Sci. Publ Math. No. 41 5-251, (1972).

Cabanes, M. ; Enguehard, M. Representation theory of finite reductive groups. New Mathematical Monographs, 1. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

Iwahori, N, Matsumoto, H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 25, 5-48 (1965).

Lusztig, G. Affine Hecke algebras and their graded version. Journal of A.M.S. Vol. 2, No.3 (1989).

Vignéras, M.-F. Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$. Progress in Mathematics, 137. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).

Vignéras, M.-F. Representations modulo p of the p-adic group $\mathrm{GL}_2(F)$. Compos. Math. 140, 333-358 (2004).

Vignéras, M.-F. Pro-p-Iwahori Hecke ring and supersingular $\overline{\mathbb{F}}_p$-representations. Math. Ann. 331, Erratum Math. Ann. 333 (2005).

Vignéras, M.-F. Algèbres de Hecke affines génériques. Representation Theory 10 (2006).