Modules simples en caractéristique p de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$

Rachel Ollivier

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université de Paris 7-Denis Diderot

Résumé

Soit F un corps p-adique. On ne connaît pas les représentations lisses irréductibles modulo p de $\mathrm{GL}_n(F)$. Mais il est tentant de conjecturer que le foncteur des invariants par le pro-p-Iwahori $I(1)$ les identifie avec les modules simples à droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$.

Dans le cas $n = 2$, on connaît les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules simples ayant un caractère central. Parmi ceux-là, on distingue les modules que l'on appelle "supersinguliers" : ils ne correspondent pas, via le foncteur des invariants par le pro-p-Iwahori, à des sous-quotients d'induites paraboliques de $\mathrm{GL}_2(F)$ (Vignéras, 2001).

Nous considérons le cas $n = 3$. Il s'agit de donner la classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-modules simples ayant un caractère central et de décrire conjecturalement ses modules supersinguliers. On remarque alors que l'ensemble de ces modules supersinguliers est en bijection (non unique) avec l'ensemble des représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F.

Key words:
anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$, modules simples supersinguliers

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, de corps résiduel à q éléments. Dans une première partie, on rappelle que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$ se décompose en un produit d'algèbres de Hecke de type "Iwahori", "régulier" ou "semi-régulier" (1.4).

La deuxième partie est consacrée à l'étude des modules simples de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. L'algèbre de Hecke-Iwahori complexe est un module libre de rang 6 sur sa sous-algèbre commutative de Bernstein. Les modules induits par les caractères de cette sous-algèbre s'avèrent fondamentaux pour la détermination des modules simples de l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe (Rogawski). Soit R un anneau unitaire, on note H_R la R-algèbre de Hecke-Iwahori. On ne dispose plus de la présentation de Bernstein

lorsque q n'est pas inversible dans R. Toutefois, la R-algèbre de Hecke-Iwahori possède une présentation dite "de Bernstein entière" (Vignéras, 2002), qui permet d'exhiber une sous-algèbre commutative $\mathcal{A}_R$ sur laquelle H_R est de type fini. On appelle R-modules standards les H_R-modules induits par les caractères de $\mathcal{A}_R$. Si R est un corps algébriquement clos, tout H_R-module simple ayant un caractère central est quotient d'un R-module standard. La semi-simplification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules standards (2.5, 2.6, 2.7) fournit donc la classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples ayant un caractère central. Cette classification est donnée en (2.2).
Parmi les $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules standards, on observe en particulier ceux dont le caractère central est "aussi nul que possible" : ce sont des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension 12 et non 6 (2.7). Leur étude montre qu'il existe des $\overline{\mathbb{Z}}_p$-modules standards qui ne sont pas des $\overline{\mathbb{Z}}_p$-modules libres. Ainsi, il apparaît que l'algèbre de Hecke-Iwahori générique n'est pas un module plat sur sa sous-algèbre commutative de Bernstein entière.

Dans la troisième partie, on étudie le cas régulier. Soit $\chi : I \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$ un caractère lisse du sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_3(F)$ que l'on suppose régulier : son orbite γ sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ possède 6 éléments.
L'algèbre de Hecke $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma) = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \underset{\chi'\in\gamma}{\oplus} \chi')$ contient une sous-algèbre commutative B_γ isomorphe au produit d'algèbres $\oplus_{\chi'\in\gamma}\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \chi')$ (3.2). Tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module induit par un caractère de B_γ (appelé module standard pour $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$) possède un unique quotient irréductible. La mise en place de ces résultats est ici faite pour $\mathrm{GL}_3(F)$ (3.4), mais elle est fidèlement transposable à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour n quelconque. La classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \underset{\chi'\in\gamma}{\oplus} \chi')$-modules simples ayant un caractère central s'obtient en déterminant le quotient irréductible de chaque module standard pour $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$. Elle est donnée en (3.3). Parmi ces modules, ceux dont le caractère central est "aussi nul que possible" sont de dimension 3. On en déduit en particulier que l'algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \underset{\chi'\in\gamma}{\oplus} \chi')$ n'est pas isomorphe à une algèbre de matrices carrées de taille 6 et que pour toute transposition $s \in \mathfrak{S}_3$, les induites compactes $ind_I^{\mathrm{GL}_3(F)}\chi$ et $ind_I^{\mathrm{GL}_3(F)}s\chi$ ne sont pas isomorphes comme $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_3(F)]$-modules.

Enfin, le cas semi-régulier est traité dans la quatrième partie. Soit $\chi : I \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un caractère lisse du sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_3(F)$ que l'on suppose semi-régulier : son orbite γ sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ possède 3 éléments. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \underset{\chi'\in\gamma}{\oplus} \chi')$ est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées de taille 3 sur l'anneau $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \chi)$. Par des calculs élémentaires, on obtient une présentation par générateurs et relations de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \chi)$ (4.1) puis la liste de ses modules simples ayant un caractère central (4.2).

On a ainsi déterminé les modules simples de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$ ayant un caractère central. Parmi eux, on distingue ceux dont le caractère central est " aussi nul que possible". On les appelle *supersinguliers*. Ce sont des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension 3.

Dans une cinquième partie, on observe une coïncidence numérique propre à nourrir l'espoir d'une correspondance de Langlands modulo p. On fixe $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ et un Frobenius géométrique du groupe de Weil de F. Entre l'ensemble fini des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-modules simples supersinguliers, tels que l'uniformisante agit par multiplication par z, et l'ensemble fini des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F, telles que le déterminant du Frobenius géométrique est égal à z, on peut trouver une bijection compatible avec la torsion par le caractère fondamental de F^* (5.3).

1 Rappels et notations.

Toutes les représentations considérées sont supposées lisses.

1.1 On pose $G = \mathrm{GL}_3(F)$.

On désigne par O_F l'anneau des entiers de F et par O_F^* le groupe des éléments inversibles de O_F. On choisit π une uniformisante de O_F, et val la valuation normalisée par $val(\pi) = 1$. On fixe $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soient $\overline{\mathbb{Z}}_p$ son sous-anneau des entiers algébriques, et $\overline{\mathbb{F}}_p$ son corps résiduel. On note $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p} : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ l'inclusion, $r_p : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$, la réduction.

Le groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ est un groupe de Coxeter de système générateur $\{s_1, s_2\}$ où, pour $i = 1, 2$, on désigne par s_i la transposition $(i, i+1)$. On considère $\mathfrak{S}_3$ comme un sous-groupe de G en identifiant un élément de $\mathfrak{S}_3$ avec la matrice de permutation lui correspondant. L'action par conjugaison de $\mathfrak{S}_3$ sur $T(\mathbb{F}_q)$ fournit une action de $\mathfrak{S}_3$ sur le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$.

On désigne par R un anneau commutatif unitaire d'unité 1_R. On notera parfois $q_R = q.1_R$ pour évoquer le fait que q s'annule dans un anneau R de caractéristique p. Lorsque R est de caractériostique nulle, on ne distinguera pas q et q_R. Si R contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité, l'ensemble des R-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On suppose désormais que R contient une racine $q - 1^{\text{ème}}$ de l'unité et $q_R - 1$ est inversible dans R, hypothèse que nous allons noter $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$.

1.2 Pour les rappels au sujet des algèbres de Hecke, on se réfère à (Vignéras, 2001, A.1) et (Ollivier, 1.1). Toutes les représentations considérées sont lisses : les stabilisateurs des points sont ouverts. On appelle caractère une représentation de dimension 1.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et $\sigma : K \to \mathrm{GL}(V)$ une R-représentation de K de type fini sur R. On note $ind_K^G \sigma$ l'induite compacte de σ à G. Elle s'identifie à l'espace des fonctions à support compact $f : G \to V$ vérifiant $f(kg) = \sigma(k)f(g)$ pour tous $k \in K$, $g \in G$, muni de la translation à droite, $(g_0.f)(g) = f(gg_0)$ pour tous g, $g_0 \in G$. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,\sigma)$ est l'algèbre des entrelacements $\mathcal{H}_R(G,\sigma) = End_{R[G]}(ind_K^G\,\sigma)$.

On suppose que σ est un caractère. L'algèbre de Hecke de σ s'identifie avec la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ munie du produit de convolution décrit par (Vignéras, 2001, A.1). Une base de l'algèbre de Hecke de σ est l'ensemble $\{T_{g,\sigma},\ \ g \in K\backslash\mathcal{S}_\sigma/K\}$ où $\mathcal{S}_\sigma$ désigne le support de l'algèbre de Hecke de σ et $T_{g,\sigma}$ l'élément de la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ de support KgK et de valeur 1_R en g.
Si σ est le caractère trivial de K, on note $\mathcal{H}_R(G,K)$ son algèbre de Hecke et on l'appelle la R-algèbre de Hecke de K. Le support de $\mathcal{H}_R(G,K)$ est égal à G tout entier et l'on notera simplement T_g l'élément $T_{g,\sigma}$.

1.3 Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de G, et $I(1)$ son unique pro-p-Sylow :

$$I = \begin{pmatrix} O_F* & O_F & O_F \\ \pi O_F & O_F^* & O_F \\ \pi O_F & \pi O_F & O_F* \end{pmatrix}, \qquad I(1) = \begin{pmatrix} 1+\pi O_F & O_F & O_F \\ \pi O_F & 1+\pi O_F & O_F \\ \pi O_F & \pi O_F & 1+\pi O_F \end{pmatrix}.$$

Ce sont des sous-groupes ouverts et compacts G. On définit l'élément

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il normalise I et $I(1)$. Le quotient $I/I(1)$ s'identifie avec le tore fini $T(\mathbb{F}_q)$. Ainsi, puisque $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$, l'ensemble des R-caractères de I triviaux sur $I(1)$ s'identifie avec $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$.

Remarque 1 Le sous-groupe $I(1)$ de G étant un pro-p-groupe, toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de G admet un vecteur non nul invariant par $I(1)$ (Barthel, Livné, 1994, Lemme 1). Ainsi, tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I est trivial sur $I(1)$.

Proposition 1 *Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ un caractère du tore fini que l'on identifie avec un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I. On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{aligned} ind_I^G\, s_2s_1\chi &\longrightarrow ind_I^G\chi \\ f_{I,s_2s_1\chi} &\longmapsto \omega f_{I,\chi}, \end{aligned}$$

où pour $\chi' \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, on désigne par $f_{I,\chi'}$ l'élément de l'induite compacte $ind_I^G\chi'$ de support I et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en l'unité de G.

Preuve L'élément ω qui normalise I et $I(1)$ agit sur $T(\mathbb{F}_q)$ comme la permutation s_2s_1 donc $f_{I\omega,s_2s_1\chi}$ est un élément de $ind_I^G s_2s_1\chi$ propre pour l'action de I pour la valeur propre χ. Ainsi le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules τ est bien défini. De plus, $f_{I\omega,s_2s_1\chi} = \omega^{-1}.f_{I,s_2s_1\chi}$ est un élément générateur de $ind_I^G s_2s_1\chi$. Donc τ est un isomorphisme.

1.4

Définition 1 *Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On note γ l'orbite de χ sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ et σ_γ la R-représentation de I triviale sur $I(1)$ définie par $\bigoplus_{\chi' \in \gamma} \chi'$. On dit que χ et γ sont*
- *réguliers si γ est de cardinal 6,*
- *semi-réguliers si γ est de cardinal 3.*

Sinon, γ est de cardinal 1 et l'on est dans le cas Iwahori.

Notons que si $q = 2$, seul le cas Iwahori existe ; si $q = 3$ seuls les cas Iwahori et semi-régulier existent.

Le corollaire 4 de (Vignéras, 2003) se traduit pour $\mathrm{GL}_3(F)$ par la proposition suivante :

Proposition 2 *Il existe une famille d'idempotents centraux orthogonaux $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, indexée sur l'ensemble Γ des $\mathfrak{S}_3$-orbites de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ telle que l'unité de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, I(1))$ est la somme de ces idempotents :*

$$1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_R(G, I(1)).$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, on a l'isomorphisme de R-algèbres $\mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma) \simeq \epsilon_\gamma \mathcal{H}_R(G, I(1))$.

De plus, pour γ, γ' orbites régulières (resp. semi-régulières, resp. de cardinal 1), les algèbres $\mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma)$ et $\mathcal{H}_R(G, \sigma_{\gamma'})$ sont isomorphes.

La dernière assertion de la proposition provient de (Vignéras, 2003, 1.3, Exemple 3).

2 Modules simples en caractéristique p sur l'algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$

Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On suppose que l'on est dans le cas Iwahori c'est-à-dire que χ est fixé par l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$. D'après la proposition 2, l'étude des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples se ramène au cas où χ est le caractère trivial $\mathbf{1} \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. Nous allons donc étudier les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-modules simples.

2.1 Présentations de l'anneau de Hecke-Iwahori.

2.1.1 Présentation de Iwahori-Matsumoto. On désigne par X le sous-groupe de G

constitué des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont des puissances de l'uniformisante π. Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}$. L'élément $x = (\pi^{v_1}, \pi^{v_2}, \pi^{v_3}) \in X$ est dit *dominant* si $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. On note X_{dom} l'ensemble des éléments dominants de X.

Le groupe de Weyl W_0 de G est le groupe de Coxeter $(\mathfrak{S}_3, \{s_1, s_2\})$. Il agit naturellement sur X. Le groupe de Weyl affine W_a de G est le groupe de Coxeter de système générateur $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ avec $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$. Le groupe de Weyl affine étendu de G, noté $\tilde{W}$, est le produit semi-direct $W_0.X$. Il s'écrit aussi $< \omega > .W_a$ où ω normalise W_a. Ainsi, la longueur ℓ du système de Coxeter (W_a, S) se prolonge à $\tilde{W}$ de façon à ce que le groupe cyclique $< \omega >$ soit l'ensemble des éléments de longueur nulle (Lusztig). On considère l'action de $\tilde{W}$ sur X qui se factorise par celle de W_0.

Nous rappelons les résultats de (Iwahori, Matsumoto). Pour $w \in \tilde{W}$, on désigne par T_w l'élément de la R-algèbre de Hecke-Iwahori de G correspondant à la double classe IwI (1.2).

Remarque 2 Dans l'isomorphisme $\mathcal{H}_R(G, I) = \epsilon_{\mathbf{1}}(\mathcal{H}_R(G, I(1))$, l'élément T_w est envoyé sur $\epsilon_{\mathbf{1}} T_w^{(1)}$ où $T_w^{(1)}$ est l'élément de la R-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori correspondant à la double classe IwI.

La R-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, I)$ est le R-module libre de base $\{T_w,\, w \in \tilde{W}\}$ vérifiant
(1) Les relations de tresse, $T_w T_{w'} = T_{ww'}$, si $w, w' \in \tilde{W}$ vérifient $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$.
(2) Les relations quadratiques, $T_s^2 = (q_R - 1)T_s + q_R$, pour tout $s \in S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

On note H_R cette algèbre. Elle est engendrée par $T_\omega^{\pm 1}$ et T_{s_1} avec les relations

$$(T_{s_1} + 1)(T_{s_1} - q) = 0,\ {T_\omega}^3 T_{s_1} = T_{s_1} {T_\omega}^3,\ T_{s_1} T_{s_2} T_{s_1} = T_{s_2} T_{s_1} T_{s_2}, \tag{1}$$

$$\text{où } T_{s_2} = T_\omega^{-1} T_{s_1} T_\omega. \quad \text{On a aussi} \quad T_{s_0} = T_\omega T_{s_1} T_\omega^{-1}. \tag{2}$$

2.1.2 Présentation de Bernstein entière pour l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$.

Pour $w \in \tilde{W}$, on désigne par E_w l'élément correspondant de la base de Bernstein entière du $\mathbb{Z}$-anneau de Hecke-Iwahori, construite dans (Vignéras, 2002).

Remarque 3 Supposons que q_R est inversible dans R. Alors on a un morphisme injectif de R-algèbres $R[X] \to H_R$, $x \mapsto \theta_x$ tel que, pour tout $x \in X$ élément dominant, θ_x est égal à $q_R^{-\ell(x)/2} T_x$ (Lusztig). Pour $w = w_0 x \in \tilde{W} = W_0.X$, l'élément E_w est alors défini dans H_R par

$$E_w = q_R^{(\ell(w) - \ell(w_0))/2} T_{w_0} \theta_x.$$

Notation 1 Pour $I \subset \{1, 2, 3\}$, on désigne par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I et de 1 ailleurs . Lorsque I est le singleton $\{i\}$, on notera simplement x_i. D'après l'appendice de (Vignéras, 2002), la longueur de $x_I \in \tilde{W}$ est égale à $|I|(3-|I|)$. Pour $I \subset \{1,2,3\}$, on désignera l'élément E_{x_I} par E_I. Par exemple, $E_{\{1,2,3\}}$ est égal à l'élément central inversible T_ω^3.

Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, on pose

$$T_{s_i}^* = T_{s_i} + 1 - q_R.$$

D'après les relations quadratiques, on a $T_{s_i} T_{s_i}^* = q_R$. On a (voir (Ollivier, Exemple 1))

$$E_{\{1\}} = T_{s_1}^* T_{s_2}^* T_\omega,\ E_{\{2\}} = T_{s_2}^* T_\omega T_{s_1},\ E_{\{3\}} = T_\omega T_{s_1} T_{s_2}; \tag{3}$$

$$E_{\{1,2\}} = T_{s_2}^* T_{s_1}^* T_\omega^2,\ \ E_{\{1,3\}} = T_{s_1}^* T_\omega^2 T_{s_2},\ E_{\{2,3\}} = T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \tag{4}$$

Le résultat suivant est un cas particulier de (Vignéras, 2002, Théorème 1).

Théorème 3 *1) L'ensemble $\{E_w\}_{w \in \tilde{W}}$ constitue une base de la R-algèbre H_R.*
2) La R-algèbre H_R contient la sous-algèbre commutative $\mathcal{A}_R$ de R-base $\{E_x, x \in X\}$. Cette dernière est de type fini, engendrée par

$$E_{\{1,2,3\}}^{\pm 1},\ E_I,\ \ \textit{pour}\ \emptyset \subset I \subset \{1,2,3\}$$

avec les relations : pour $I, J \subset \{1,2,3\}$,

$$E_I E_J = q_R^{(|I \cup J| - |I|)(|I \cup J| - |J|)} E_{I \cap J} E_{I \cup J}. \tag{5}$$

3) Le centre de H_R est la R-algèbre de type fini $\mathbb{Z}[q][\, T_\omega^{\pm 3}, Z_1, Z_2\,]$, où

$$Z_1 = E_{\{1\}} + E_{\{2\}} + E_{\{3\}},\ \ Z_2 = E_{\{1,2\}} + E_{\{2,3\}} + E_{\{1,3\}}.$$

L'algèbre H_R est de type fini sur son centre.

Remarque 4 Supposons que q_R est inversible dans R. Alors $\mathcal{A}_R$ n'est autre que la sous-algèbre commutative de Bernstein, c'est-à-dire l'image par le morphisme injectif de R-algèbres $R[X] \to H_R$, $x \mapsto \theta_x$. Elle est égale à la sous-R-algèbre commutative de H_R des polynômes de Laurent $R[\theta_{x_1}^{\pm 1}, \theta_{x_2}^{\pm 1}, \theta_{x_2}^{\pm 1}]$.

2.2 Classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples. Soient $y, y \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. On désigne par $\mu(z, y, y')$ le caractère du centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ déterminé par :

$$T_\omega^3 \longmapsto z,\ Z_1 \longmapsto y,\ Z_2 \longmapsto y'.$$

On dit de $\mu(z, y, y')$ qu'il est *régulier* si $yy' \neq 0$, *singulier* sinon. Dans le cas particulier où $(y, y') = (0, 0)$ on dit que $\mu(z, y, y')$ est *supersingulier.* Nous donnons maintenant une liste de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$. Pour décrire l'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, il suffit de définir les actions de T_{s_1} et T_ω car $\{T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}\}$ est un système générateur de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$**-modules de caractère central** $\mu(z,y,y')$ **régulier :**

- $K_6(z,y,y')$ de base $\{u, T_\omega u, T_\omega^2 u, v, T_\omega v, T_\omega^2 v\}$ avec
$$T_{s_1}(u) = v,\ T_{s_1}(T_\omega u) = yy'^{-1}T_\omega^2 v,\ T_{s_1}(T_\omega^2 u) = -T_\omega^2 u,$$
$$T_{s_1}(v) = -v,\ T_{s_1}(T_\omega v) = y'z^{-1}T_\omega^2 u,\ \ T_{s_1}(T_\omega^2 v) = -T_\omega^2 v.$$
- $M_3(z,y,y')$ de base $\{u_1, T_\omega u_1, T_\omega^2 u_1\}$, avec $y'^2 = zy$.
L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $T_{s_1}u_1 = 0$, $T_{s_1}T_\omega u_1 = y'z^{-1}T_\omega^2 u_1$, $T_{s_1}T_\omega^2 u_1 = -T_\omega^2 u_1$.
Si $y^3 = z$, alors $M_3(z,y,y')$ a pour sous-module le caractère de base $y^2u_1 + yT_\omega u_1 + T_\omega^2 u_1$ suivant :
$$M_1(0,y) : T_\omega \to y,\ T_{s_1} \to 0.$$
Le quotient obtenu est isomorphe à $M_2(y)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{w_1, T_\omega w_1\}$ déterminé par $T_{s_1}w_1 = 0$, $T_{s_1}T_\omega w_1 = -yw_1 - T_\omega w_1$, $T_\omega^2 w_1 = -y^2 w_1 - yT_\omega w_1$.
- $\tilde{M}_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{u}_1, T_\omega \tilde{u}_1, T_\omega^2 \tilde{u}_1\}$ avec $y'^2 = zy$.
L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $T_{s_1}\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_1$, $T_{s_1}T_\omega \tilde{u}_1 = -y'z^{-1}T_\omega^2 \tilde{u}_1$, $T_{s_1}T_\omega^2 \tilde{u}_1 = -T_\omega^2 \tilde{u}_1$.
Si $y^3 = z$, alors $\tilde{M}_3(z,y,y')$ a pour sous-module le module $\tilde{M}_2(y)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{v}_1, T_\omega \tilde{v}_1\}$ avec $\tilde{v}_1 = y^2\tilde{u}_1 - yT_\omega \tilde{u}_1$ et $T_{s_1}\tilde{v}_1 = -\tilde{v}_1 - y^{-1}T_\omega \tilde{v}_1$, $T_{s_1}T_\omega \tilde{v}_1 = 0$ $T_\omega^2 \tilde{v}_1 = -y^2\tilde{v}_1 - yT_\omega \tilde{v}_1$.
Le quotient obtenu est le caractère
$$M_1(-1,y) : T_\omega \to y,\ T_{s_1} \to -1.$$
- $N_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{u_2, T_\omega u_2, T_\omega^2 u_2\}$, avec $y' = y^2$.
L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-est donnée par $T_{s_1}u_2 = yz^{-1}T_\omega^2 u_2$, $T_{s_1}T_\omega u_2 = 0$, $T_{s_1}T_\omega^2 u_2 = -T_\omega^2 u_2$.
Si $y^3 = z$, alors $N_3(z,y,y')$ a pour sous-module le caractère $M_1(0,y)$ de base $y^2u_2 + yT_\omega u_2 + T_\omega^2 u_2$. Le quotient obtenu est isomorphe à $\tilde{M}_2(y)$.
- $\tilde{N}_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{u}_2, T_\omega \tilde{u}_2, T_\omega^2 \tilde{u}_2\}$ avec $y' = y^2$.
L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $T_{s_1}\tilde{u}_2 = -yz^{-1}T_\omega^2 \tilde{u}_2$, $T_{s_1}T_\omega \tilde{u}_2 = -T_\omega \tilde{u}_2$, $T_{s_1}T_\omega^2 \tilde{u}_2 = -T_\omega^2 \tilde{u}_2$.
Si $y^3 = z$, alors $\tilde{N}_3(z,y,y')$ a pour sous-module est le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{v}_2, T_\omega \tilde{v}_2\}$ avec $\tilde{v}_2 = yT_\omega \tilde{u}_2 - T_\omega^2 \tilde{u}_2$ qui est isomorphe à $M_2(y)$. Le quotient obtenu est le caractère $M_1(-1,y)$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$**-modules de caractère central** $\mu(z,y,y')$ **singulier, non supersingulier :**

- $L_6(z,y,0)$ de base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v, w, T_\omega w, T_\omega^2 w\}$ avec $T_{s_1}v = 0$, $T_{s_1}T_\omega v = T_\omega w$, $T_{s_1}T_\omega^2 v = -T_\omega^2 v$, $T_{s_1}(w) = yz^{-1}T_\omega^2 v$, $T_{s_1}T_\omega w = -T_\omega w$, $T_{s_1}(T_\omega^2 w) = -T_\omega^2 w$.
- $\tilde{L}_6(z,0,y') = \{v, T_\omega v, T_\omega^2 v, w, T_\omega w, T_\omega^2 w\}$. $T_{s_1}(v) = w$, $T_{s_1}(T_\omega v) = 0$, $T_{s_1}(T_\omega^2 v) = -T_\omega^2 v$, $T_{s_1}(w) = -w$, $T_{s_1}(T_\omega w) = y'z^{-1}T_\omega^2 v$, $T_{s_1}(T_\omega^2 w) = -T_\omega^2 w$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$**-modules de caractère central supersingulier** $\mu(z,0,0)$ **:**

- $P_3(z)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{u, T_\omega u, T_\omega^2 u\}$. L'action de T_{s_1} donnée par $T_{s_1}u = T_{s_1}T_\omega u = 0$, $T_{s_1}T_\omega^2 u = -T_\omega^2 u$.
- $\tilde{P}_3(z)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v\}$. L'action de T_{s_1} donnée par $T_{s_1}v = -v$, $T_{s_1}T_\omega v = 0$, $T_{s_1}T_\omega^2 v = -T_\omega^2 v$.

L'observation du caractère central et de la trace de l'action de T_{s_1} montre que deux $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de dimension 6, 3 ou 1 de la liste précédente ne sont pas isomorphes.
Soit $y \in \overline{\mathbb{F}}_p^*$. Remarquons qu'un élément du noyau de l'action de $T_{s_1}+1$ sur le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $M_2(y)$ est envoyé par T_ω dans le noyau de l'action de T_{s_1}. En revanche, l'image par T_ω du noyau de l'action de $T_{s_1}+1$ sur $\tilde{M}_2(y)$ n'est pas un espace propre pour l'action de T_{s_1}. Par conséquent, les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $M_2(y)$ et $\tilde{M}_2(y)$ ne sont pas isomorphes.

Théorème 4 *a) Soient $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^*$. Un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$ est isomorphe à l'un des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de la liste suivante :*

$$M_1(0,y),\ M_1(-1,y),\ M_2(y),\ \tilde{M}_2(y) \text{ avec } y \neq 0,\ y' = y^2,\ z = y^3,$$
$$M_3(z,y,y'),\ \tilde{M}_3(z,y,y') \text{ avec } y \neq 0,\ y'^2 = zy,\ y' \neq y^2,$$
$$N_3(z,y,y'),\ \tilde{N}_3(z,y,y') \text{ avec } y \neq 0\ y'^2 \neq zy,\ y' = y^2,$$
$$K_6(z,y,y'),\ \text{avec } yy' \neq 0\ y'^2 \neq zy,\ y' \neq y^2,$$
$$L_6(z,y,0) \text{ avec } y \neq 0,\ \tilde{L}_6(z,0,y') \text{ avec } y' \neq 0,$$
$$P_3(z),\ \tilde{P}_3(z).$$

Deux modules simples de cette liste ne sont pas isomorphes.

b) De plus, tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible M se relève : il existe un $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module irréductible M_0 admettant une structure entière L_0 telle que l'on a l'isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$M \simeq L_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

La suite de la section 2 est consacrée à la démonstration du théorème 4.

2.3 Caractères de $\mathcal{A}_R$. Un caractère de $\mathcal{A}_R$ est un morphisme de R-algèbres $\lambda : \mathcal{A}_R \to R$. D'après (Vignéras, 2003, 1.4), l'action par conjugaison de $\tilde{W}$ sur X fournit une action de $\tilde{W}$ sur $\mathcal{A}_R$ donnée par $w.E_x = E_{wxw^{-1}}$ qui est compatible avec la structure de R-algèbre. On en déduit une action de $\tilde{W}$ sur les caractères de $\mathcal{A}_R$.

Etudions le cas où $R = \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère.

D'après la relation (5), il existe un drapeau $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq ... \subsetneq I_r \subsetneq I_{r+1} = \{1,2,3\}$ tel que

$$\lambda(E_I) \neq 0 \text{ si et seulement s'il existe } i \in \{0, .., r+1\} \text{ tel que } I = I_i.$$

Le caractère λ est alors entièrement déterminé par la donnée de $\{\lambda(E_{I_i})\}_{i=1,..,r+1}$.

Un sous-ensemble I de $\{1,2,3\}$ est dit dominant si la diagonale lui correspondant (notation 1) est un élément dominant de X. Cela signifie que I est l'un des ensembles

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}.$$

Un drapeau constitué d'ensembles dominants sera dit dominant.

Définition 2 – *On dit de λ qu'il est régulier, si son drapeau est complet c'est-à-dire si $r = 2$.*
– *Sinon, on dit qu'il est singulier.*
– *Dans le cas où le drapeau est trivial, c'est-à-dire $\lambda(E_I) = 0$ pour $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, 2, 3\}$, on dit de λ qu'il est supersingulier.*

Remarque 5 – Le caractère λ est régulier (resp. singulier, resp. supersingulier) si et seulement si sa restriction au centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est un caractère régulier (resp. singulier, resp. supersingulier) au sens du paragraphe 2.2.
– Si λ est régulier (resp. singulier), tout caractère appartenant à son orbite sous l'action de $\tilde{W}$ est régulier (resp. singulier). Si λ est supersingulier, son orbite est de cardinal 1.
– Dans l'orbite de λ sous l'action de $\tilde{W}$, il y a un caractère de drapeau dominant.
– Un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier de drapeau dominant (resp. singulier de drapeau dominant, resp. supersingulier) est entièrement déterminé par sa restriction au centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$.

Proposition 5 *Soit λ un caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Il existe un caractère λ_0 de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ qui relève λ c'est-à-dire tel que $\lambda(E_x) = r_p \circ \lambda_0(E_x)$, pour tout $x \in X$.*

Preuve Cette proposition est vraie dans le cas de $\mathrm{GL}_n(F)$ pour n quelconque (Vignéras, 2001, Théorème 6). D'après la remarque précédente, on se ramène par conjugaison au cas d'un caractère λ de drapeau dominant. On note $z_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p{}^*$ un relèvement de $z = \lambda(T_\omega^3) \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. Dans chacun des cas suivants, nous donnons un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ dont la restriction à $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_p$ et relève λ. (Pour s'en assurer il suffit de vérifier que, pour tout $I \subset \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0(E_I)$ appartient à $\overline{\mathbb{Z}}_p$ et que sa réduction modulo p est égale à $\lambda(E_I)$.) D'après la remarque 4, un caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est entièrement déterminé par la donnée de ses valeurs en θ_{x_1}, θ_{x_2}, θ_{x_3}.

– Lorsque λ est régulier, on a $\lambda(E_{\{3\}}) = y \neq 0$, $\lambda(E_{\{2,3\}}) = y' \neq 0$.
Soient y_0 et $y'_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant respectivement y et y'. On définit λ_0 par : $\theta_{x_1} \mapsto q z_0 {y'}_0^{-1}$, $\theta_{x_2} \mapsto y'_0 y_0^{-1}$, $\theta_{x_3} \mapsto q^{-1} y_0$.
– Lorsque λ est singulier, non supersingulier :
Premier cas : $\lambda(E_{\{3\}}) = y \neq 0$. Soit $y_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant y. On définit λ_0 par : $\theta_{x_1} \mapsto q^{1/2}$, $\theta_{x_2} \mapsto q^{1/2} z_0 y_0^{-1}$, $\theta_{x_3} \mapsto q^{-1} y_0$.
Deuxième cas : $\lambda(E_{\{2,3\}}) = y' \neq 0$. Soit $y'_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant y'. On définit λ_0 par : $\theta_{x_1} \mapsto z_0 {y'}_0^{-1}$, $\theta_{x_2} \mapsto q^{-1/2}$ $\theta_{x_3} \mapsto q^{-1/2} y'_0$.
– Si λ est supersingulier, on définit λ_0 par $\theta_{x_1} \mapsto 1$, $\theta_{x_2} \mapsto 1$, $\theta_{x_3} \mapsto z_0$. $\square$

2.4 Modules standards. Soit un caractère $\lambda : \mathcal{A}_R \to R$.

Définition 3 *On appelle H_R-module standard induit par λ le H_R-module*

$$I(\lambda) = H_R \otimes_{\mathcal{A}_R} \lambda.$$

On note ϕ l'élément générateur $1 \otimes 1$ de $I(\lambda)$ et on l'appelle le générateur canonique.

Remarque 6 Dans l'isomorphisme $H_R \simeq \epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_R(G, I(1))$, la sous-algèbre commutative $\mathcal{A}_R$ s'identifie avec $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{A}^{(1)}$ où $\mathcal{A}^{(1)}$ est l'algèbre commutative donnée par la présentation de Bernstein entière pour $\mathcal{H}_R(G, I(1))$ ((Vignéras, 2003, 1.4), voir aussi (Ollivier, 2.2)). Par conséquent, on peut considérer le H_R-module standard $I(\lambda)$ comme un module standard pour l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori $\mathcal{H}_R(G, I(1))$. Les propriétés de ces derniers rassemblées en (Ollivier, 3) se transposent donc au cas des H_R-modules standards. On rappelle celles dont nous aurons l'usage.

Propriétés des modules standards

1) Le module standard $I(\lambda)$ est un R-module de type fini.
2) Propriété universelle : si R est un corps algébriquement clos, tout H_R-module simple ayant un caractère central est quotient d'un H_R-module standard.
3) Si $R = \overline{\mathbb{Z}}_p$, le caractère λ s'étend de façon unique en un caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ noté $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda$. On note $L(\lambda)$ le sous-$H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda)$ engendré par son générateur canonique. C'en est une structure entière, c'est-à-dire que $L(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de type fini, stable sous l'action de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$, et qui contient une base du $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda)$. On l'appelle la *structure entière canonique* du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda$.
4) Si $R = \overline{\mathbb{F}}_p$, on choisit λ_0 un caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ relevant λ (proposition 5).
Le module standard induit par λ est la réduction modulo p du $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ_0 :
$$I(\lambda) \simeq I(\lambda_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p.$$
C'est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 6. S'il est de dimension égale à 6, alors le $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ_0 est isomorphe à $L(\lambda_0)$, la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$.

Proposition 6 *Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère. Pour tout $w \in \tilde{W}$, les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $L(\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ et $L(w.\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ ont la même semi-simplification.*

Preuve Il est démontré dans (Rogawski, 1985, 2.3), à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig que les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards induits par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda$ et $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}w.\lambda$ ont la même semi-simplification. Il est de plus classique d'établir que la semi-simplification de la réduction d'une structure entière d'un $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module ne dépend que de la semi-simplification de ce $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module. $\square$

Corollaire 7 *Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$. Si les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par les conjugués de λ sont de dimension 6, alors ils ont la même semi-simplification.*

Preuve On se place sous les hypothèses du corollaire. Le caractère λ se relève en un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ (proposition 5) et pour $w \in \tilde{W}$, le caractère $w.\lambda_0$ relève le caractère $w.\lambda$ conjugué de λ.

La propriété 4) dit que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est isomorphe à la réduction de la structure entière canonique $L(\lambda_0)$ du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$. D'après la proposition 6, il a donc la même semi-simplification que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $w.\lambda$. $\square$

On dira d'un module standard induit par un caractère $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ et de tout quotient de ce module standard, qu'ils sont réguliers (resp. singuliers, resp. supersinguliers) si λ est régulier (resp. singulier, resp. supersingulier).

Remarque 7 Si λ_1 et λ_2 sont deux $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères distincts de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, réguliers de drapeau dominant (resp. singuliers de drapeau dominant, resp. supersinguliers), les modules standards qu'ils induisent n'ont pas le même caractère central : ils ne sont pas isomorphes.

Par la propriété universelle des modules standards, il suffit, pour obtenir la classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples ayant un caractère central, de déterminer la semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards.

2.5 Semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers.

Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère régulier. Notons y, y', z les éléments non nuls de $\overline{\mathbb{F}}_p$ tels que la restriction de λ au centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est définie par

$$T_\omega^3 \mapsto z,\ Z_1 \mapsto y,\ Z_2 \mapsto y'.$$

D'après (Ollivier, Corollaire 6), on a le résultat suivant.

Proposition 8 *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6.*

Théorème 9
- *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est irréductible si et seulement si $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} \neq y$, auquel cas il est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $K_6(z, y, y')$.*
- *Supposons que $zy'^{-1} = y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} \neq y$.*
  Alors $I(\lambda)$ possède deux sous-quotients irréductibles non isomorphes. L'un est isomorphe à $M_3(z, y, y')$, l'autre à $\tilde{M}_3(z, y, y')$.
- *Supposons que $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} = y$.*
  Alors $I(\lambda)$ possède deux sous-quotients irréductibles non isomorphes. L'un est isomorphe à $N_3(z, y, y')$, l'autre à $\tilde{N}_3(z, y, y')$.
- *Supposons que $y'y^{-1} = y$ et $zy'^{-1} = y'y^{-1}$. Alors $I(\lambda)$ admet quatre constituants irréductibles non-isomorphes : $M_1(0, y)$, $M_1(-1, y)$, $M_2(y)$, $\tilde{M}_2(y)$.*

Preuve Supposons que le drapeau de λ est dominant, $\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$. On définit le caractère non ramifié $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \mathcal{X}_3 : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ du tore déployé de G par

$$\mathcal{X}_1(\pi) = zy'^{-1},\ \mathcal{X}_2(\pi) = y'y^{-1},\ \mathcal{X}_3(\pi) = y.$$

Le module standard induit par λ est isomorphe à l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ (Ollivier, proposition 11). La semi-simplification de ce module standard est donnée en (5.4, *loc. cit*), où l'on trouve bien les résultats annoncés par le théorème.

Un conjugué de λ est régulier et induit un module standard de dimension 6 d'après la proposition 8. Par le corollaire 7, ce dernier a la même semi-simplification que le module standard induit par λ. Le théorème est ainsi démontré car tout caractère régulier de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est conjugué à un caractère régulier de drapeau dominant. $\square$

Relèvement des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples réguliers. On suppose que le drapeau de λ est dominant. Soient $z_0, y_0, y'_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p{}^*$ relevant respectivement z, y, y'. La preuve de la proposition 5 fournit un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ. Il est défini sur $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ par

$$\theta_{x_1} \mapsto q z_0 {y'}_0^{-1},\ \theta_{x_2} \mapsto y'_0 y_0^{-1},\ \theta_{x_3} \mapsto q^{-1} y_0.$$

Le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet une structure entière canonique $L(\lambda_0)$ isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ_0 (proposition 8 et propriété 4) des modules standards) et l'on a $L(\lambda_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \simeq I(\lambda)$.

Si $I(\lambda)$ est irréductible, alors $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} \neq y$, d'après la condition d'irréductibilité du théorème 9. Dès lors, z_0, y_0, y'_0 vérifient nécessairement les relations $\lambda_0(\theta_{x_1}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_2})$, et $\lambda_0(\theta_{x_2}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_3})$. D'après le critère d'irréductibilité pour les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards (Rogawski, 1986), $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ est alors irréductible et il relève le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard irréductible $I(\lambda)$.
Si $I(\lambda)$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $N_3(z, y, y')$ et $\tilde{N}_3(z, y, y')$, alors, d'après le théorème 9, c'est que l'on a $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} = y$. On peut choisir z_0, y_0, y'_0 tels que $\lambda_0(\theta_{x_1}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_2})$ et $\lambda_0(\theta_{x_2}) = q\lambda_0(\theta_{x_3})$. Dans ce cas $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet, d'après (Rogawski, 1986), deux constituants irréductibles, qui relèvent dès lors respectivement $N_3(z, y, y')$ et $\tilde{N}_3(z, y, y')$.
Le cas où $I(\lambda)$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $M_3(z, y, y')$ et $\tilde{M}_3(z, y, y')$ est traité de même.
Enfin, si $I(\lambda)$ admet quatre constituants irréductibles, alors, d'après le théorème 9, on peut choisir z, y_0, y'_0 tels que $\lambda_0(\theta_{x_1}) = q\lambda_0(\theta_{x_2})$ et $\lambda_0(\theta_{x_2}) = q\lambda_0(\theta_{x_3})$. Dans ce cas $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet, d'après (Rogawski, 1986) également quatre constituants irréductibles, qui relèvent respectivement $M_1(0, y)$, $M_1(-1, y)$, $M_2(y)$, $\tilde{M}_2(y)$.

2.6 Semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards singuliers, non supersinguliers.

Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère singulier non supersingulier. Soient $y, y', z \in \overline{\mathbb{F}}_p$ avec

$z \neq 0$, $(y, y') \neq (0,0)$, $yy' = 0$ tels que la restriction de λ au centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est définie par

$$T_\omega^3 \longmapsto z, \quad Z_1 \longmapsto y, \quad Z_2 \longmapsto y'.$$

Proposition 10 *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension* 6.

Preuve D'après (Ollivier, Proposition 2), les modules standards induits par les conjugués de λ sous l'action du cycle s_2s_1 ont la même dimension. Puisqu'un caractère singulier non supersingulier est conjugué, sous l'action du cycle s_2s_1, à un caractère de drapeau dominant, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où le drapeau de λ est dominant.

D'après (Lemme 7, *loc.cit*), le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments

$$\{\phi, T_\omega\phi,\ T_\omega^2\phi, T_{s_i}\phi,\ T_\omega T s_i\phi,\ T_\omega^2 T_{s_i}\phi,\ i \in \{0,1,2\}\}.$$

- Supposons que $y \neq 0$. Cela signifie que le drapeau de λ est $\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,2,3\}$. La relation (3) dit que $E_{\{3\}} = T_\omega T_{s_1} T_{s_2}$. Elle donne donc $T_{s_2}\phi \neq 0$ et permet aussi de remarquer, avec les relations (2), que $T^*_{s_0} E_{\{3\}} = 0$ donc $T^*_{s_0}\phi = 0$. De même, $T_{s_1}E_{\{3\}} = T_\omega T_{s_2} T_{s_1} T_{s_2} = T_\omega T_{s_1} T_{s_2} T_{s_1}$. Or, puisque $\{2,3\}$ n'apparaît pas dans le drapeau de λ, on a $E_{\{2,3\}}\phi = 0$ c'est-à-dire $T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1}\phi = 0$. D'où $T_{s_1}E_{\{3\}}\phi = 0$ et $T_{s_1}\phi = 0$. Par conséquent, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments $\{\phi, T_\omega\phi,\ T_\omega^2\phi,\ T_{s_2}\phi,\ T_\omega T_{s_2}\phi,\ T_\omega^2 T_{s_2}\phi\}$. Or on sait qu'il est de dimension supérieure ou égale à 6 (propriété 4)), donc cet ensemble en est une base.
- Le cas où $y' \neq 0$ et $y = 0$ se traite de même et l'on obtient que $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 de base $\{\phi, T_\omega\phi,\ T_\omega^2\phi,\ T_{s_1}\phi,\ T_\omega T_{s_1}\phi,\ T_\omega^2 T_{s_1}\phi\}$.

□

Théorème 11 *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est irréductible. Il est isomorphe à $L_6(z,y,0)$ si $y \neq 0$, à $\tilde{L}_6(z,0,y')$ si $y' \neq 0$.*

Preuve Nous montrons le théorème 11 dans le cas où le drapeau de λ est dominant. Comme dans la preuve du théorème 9, le cas général s'en déduit grâce au corollaire 7.

Soit M un sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module propre de $I(\lambda)$. Supposons que T_{s_1} agit par zéro sur M. Dès lors $T_{s_0} = T_\omega T_{s_1} T_\omega^{-1}$ et $T_{s_2}{}^{-1} = T_\omega^{-1} T_{s_1} T_\omega$ agissent également par zéro sur M et, d'après les relations (3), et (4), les éléments centraux Z_1, et Z_2 agissent alors sur tout élément $m \in M$ par

$$Z_1 m = (T_\omega T^*_{s_2} T^*_{s_0} + T_\omega T^*_{s_0} T_{s_1} + T_\omega T_{s_1} T_{s_2})m = T_\omega m,$$
$$Z_2 m = (T_\omega^2 T^*_{s_1} T^*_{s_0} + T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} + T_\omega^2 T^*_{s_0} T_{s_2})m = T_\omega^2 m,$$

ce qui, puisque M est non nul, est en contradiction avec le fait que $I(\lambda)$ admet un caractère central singulier. Par conséquent, M n'est pas inclus dans le noyau de l'action de T_{s_1} et, puisque $(T_{s_1}+1)T_{s_1}=0$, il existe un élément non nul $m\in M$, appartenant au noyau de l'action de $T_{s_1}+1$.

Premier cas : le drapeau de λ est $\emptyset\subsetneq\{3\}\subsetneq\{1,2,3\}$. Cela signifie que $y\neq 0$. D'après la preuve de la proposition 10, une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda)$ est donnée par $\{\phi, T_\omega\phi,\ T_\omega^2\phi,\ T_{s_2}\phi,\ T_\omega T_{s_2}\phi,\ T_\omega^2 T_{s_2}\phi\}$. De plus on y a vu que $T^*_{s_0}\phi=0$ et $T_{s_1}\phi=0$. On vérifie alors à l'aide des relations (3) et (4) que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est isomorphe à $L_6(z,y,0)$ *via* l'identification $v\mapsto\phi$, $w\mapsto T_{s_2}\phi$. En effet on a

- $T_{s_1}.\phi=0$,
- $T_{s_1}.T_\omega\phi=T_\omega T_{s_2}\phi$,
- $T_{s_1}.T_\omega^2\phi=T_\omega^2T_{s_0}\phi=-T_\omega^2\phi$,
- $E_{\{3\}}=T_\omega T_{s_1}T_{s_2}$ donc $T_{s_1}.T_{s_2}\phi=z^{-1}yT_\omega^2\phi$,
- $T_{s_1}.T_\omega T_{s_2}\phi=T_\omega {T_{s_2}}^2\phi=-T_\omega T_{s_2}\phi$,
- $E_{\{1,3\}}=T^*_{s_1}T_\omega^2T_{s_2}$ donc $0=T^*_{s_1}T_\omega^2T_{s_2}\phi$ et $T_{s_1}.T_\omega^2T_{s_2}\phi=-T_\omega^2T_{s_2}\phi$

L'élément non nul $m\in M$, appartenant au noyau de l'action de $T_{s_1}+1$, s'écrit

$$m=\alpha T_\omega^2\phi+\beta T_\omega T_{s_2}\phi+\gamma T_\omega^2T_{s_2}\phi$$

avec $\alpha,\beta,\gamma\in\overline{\mathbb{F}}_p$. On a alors $T_\omega T_{s_1}T_\omega.m=z(-\beta T_{s_2}\phi+\gamma y\phi)\in M$, et $T_{s_1}(T_\omega T_{s_1}T_\omega.m)=-\beta yT_\omega^2\phi\in M$. Or ϕ engendre le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$. Donc, si β était non nul, M ne serait pas un sous-module propre de $I(\lambda)$. Donc $\beta=0$. De même, on a alors $\gamma=0$, et $\alpha=0$, et $m=0$. Par conséquent $I(\lambda)$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible.

Deuxième cas : le drapeau de λ est $\emptyset\subsetneq\{2,3\}\subsetneq\{1,2,3\}$. Cela signifie que $y'\neq 0$. D'après la preuve de la proposition 10, une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda)$ est donnée par $\{\phi, T_\omega\phi,\ T_\omega^2\phi,\ T_{s_1}\phi,\ T_\omega T_{s_1}\phi,\ T_\omega^2T_{s_1}\phi\}$ et l'on a $T_{s_0}\phi=-\phi$, $T_{s_2}\phi=0$. On vérifie alors à l'aide des relations (3) et (4) que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est isomorphe à $\tilde{L}_6(z,0,y')$ *via* l'identification $v\mapsto\phi$, $w\mapsto T_{s_1}\phi$. En effet, on a

- $T_{s_1}.\phi=T_{s_1}\phi$,
- $T_{s_1}T_\omega\phi=T_\omega T_{s_2}\phi=0$,
- $T_{s_1}T_\omega^2\phi=T_\omega^2T_{s_0}\phi=-T_\omega^2\phi$,
- $T_{s_1}.T_{s_1}\phi=-T_{s_1}\phi$,
- $E_{\{2,3\}}=T_\omega^2T_{s_2}T_{s_1}$ donc $T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\phi=T_\omega T_{s_2}T_{s_1}=z^{-1}y'T_\omega^2\phi$,
- $E_{\{2\}}=T^*_{s_2}T_\omega T_{s_1}$ donc $T^*_{s_2}T_\omega T_{s_1}\phi=0$ et $T_{s_1}.T_\omega^2T_{s_1}\phi=T_\omega T_{s_2}T_\omega T_{s_1}\phi=-T_\omega^2T_{s_1}\phi$.

L'élément $m\neq 0$, $m\in M$ non nul appartenant au noyau de l'action de $T_{s_1}+1$, s'écrit

$$m=\alpha T_\omega^2\phi+\beta T_{s_1}\phi+\gamma T_\omega^2T_{s_1}\phi$$

avec $\alpha,\beta,\gamma\in\overline{\mathbb{F}}_p$. De plus, on a $T_{s_1}T_\omega^2.m=-\beta T_\omega^2T_{s_1}\phi+\gamma y'T_\omega^2\phi\in M$, et $(T_{s_1}T_\omega^2)^2.m=-\beta y'T_\omega^2\phi\in M$. Or ϕ engendre le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$. Donc, $\beta=0$, puis $\gamma=0$, et $\alpha=0$. Par conséquent $I(\lambda)$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible. $\square$

Relèvement des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards singuliers, non-supersinguliers.

Soit $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ le relèvement de λ donné dans la preuve de la proposition 5. Puisque le module standard induit par λ est de dimension 6, la propriété 4) dit que le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ admet une structure entière canonique $L(\lambda_0)$ isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ_0 et de réduction isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ.

Le critère d'irréductibilité des $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards (Rogawski, 1986) nous assure que le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ est irréductible.

Ainsi, le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard irréductible $I(\lambda)$ se relève : il est isomorphe à la réduction de la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module irréductible $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$.

2.7 Semi-simplification des modules standards supersinguliers.

Soit $\lambda : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère supersingulier. Il est entièrement déterminé par sa valeur $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ en l'élément central inversible T_ω^3. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 12 *Il existe un morphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules défini par*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : I(\lambda) &\longrightarrow \quad I(\lambda) \\ \phi \quad &\longmapsto (1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi. \end{aligned}$$

où ϕ désigne le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$. C'est un projecteur et le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ se décompose en la somme directe de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$I(\lambda) = Im\mathcal{P} \oplus Ker\mathcal{P}.$$

Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Im\mathcal{P}$ est indécomposable de longueur 2 : on a la suite exacte de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$0 \to \tilde{P}_3(z) \longrightarrow Im(\mathcal{P}) \longrightarrow P_3(z) \longrightarrow 0$$

et $Ker\mathcal{P}$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module isomorphe à la somme directe $\tilde{P}_3(z) \oplus \tilde{P}_3(z)$.

Corollaire 13 *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est de dimension* 12.

2.7.1 On désigne par $I(\lambda)_\lambda$ le sous-espace vectoriel de $I(\lambda)$ λ-isotypique :

$$I(\lambda)_\lambda = \{v \in I(\lambda),\ E_x.v = \lambda(E_x)v\ \forall x \in X\}.$$

Lemme 14 *Le sous-espace vectoriel $I(\lambda)_\lambda$ est stable sous l'action de l'algèbre de Hecke finie de générateurs $\{T_{s_1}, T_{s_2}\}$.*

Preuve Cela tient aux relations de Bernstein entières, démontrées en (Ollivier, 4.4.1) et que l'on rappelle : soit $i \in \{1, 2\}$ et I_0 un sous-ensemble de $\{1, 2, 3\}$ ne contenant ni i, ni

$i+1$.
$\mathcal{B}_1$: $T^*_{s_i} E_{I_0\cup\{i+1\}} = E_{I_0\cup\{i\}} T_{s_i}$,
$\mathcal{B}_2$: $E_{I_0\cup\{i+1\}} T^*_{s_i} = T_{s_i} E_{I_0\cup\{i\}}$,
$\mathcal{B}_3$: E_{I_0}, $E_{I_0\cup\{i,i+1\}}$ et T_{s_i} commutent.

La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est engendrée par les éléments $T_\omega^{\pm 3}$ et E_I, pour $I \subset \{1,2,3\}$ donc un élément appartient au sous-espace vectoriel λ-isotypique si et seulement si son image sous l'action de E_I est nulle pour tout $I \subsetneq \{1,2,3\}$. Soient v un élément de $I(\lambda)_\lambda$, $i \in \{1,2\}$ et $I \subsetneq \{1,2,3\}$.
– Si $i \in I$, $i+1 \notin I$, alors $E_I T_{s_i} v = T^*_{s_i} E_{I\cup\{i+1\}-\{i\}} v = 0$, d'après la relation ($\mathcal{B}_1$).
– Si $i \notin I$, $i \in I$, alors $E_I T_{s_i} v = T_{s_i} E_{I\cup\{i\}-\{i+1\}} v - E_I v = 0$, d'après la relation ($\mathcal{B}_2$).
– Dans les autres cas, T_{s_i} et E_I commutent donc $E_I T_{s_i} v = 0$ d'après la relation ($\mathcal{B}_3$).
Ainsi $T_{s_i} v$ appartient au sous-espace λ-isotypique. $\square$

2.7.2 Soit $\epsilon \in \{-1,1\}$. Nous définissons un relèvement de λ noté λ_ϵ. Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^{\,*}$ relevant z. On vérifie aisément que la restriction à $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ du caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ donné par

$$\theta_{x_1} \mapsto 1,\ \theta_{x_2} \mapsto q^{\epsilon/2},\ \theta_{x_3} \mapsto z_0 q^{-\epsilon/2}$$

induit un caractère $\lambda_\epsilon : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ.

Nous noterons ϕ_ϵ le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon$. On rappelle que le sous-$H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module qu'il engendre est la structure entière canonique $L(\lambda_\epsilon)$. On notera $\bar{\phi}_\epsilon$ son image dans la réduction modulo p de cette structure entière. L'élément central T_ω^3 agit sur $\bar{\phi}_\epsilon$ par multiplication par le scalaire z.

Lemme 15 *Supposons que $\epsilon = 1$. La réduction modulo p de la structure entière canonique $L(\lambda_1)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base*

$$\{\bar{\phi}_1,\ T_\omega\bar{\phi}_1,\ T_\omega^2\bar{\phi}_1, T_{s_2}\bar{\phi}_1,\ T_\omega T_{s_2}\bar{\phi}_1,\ T_\omega^2 T_{s_2}\bar{\phi}_1\}.$$

L'action de T_{s_1} y est donnée par

$$\begin{array}{c} T_{s_1}.\bar{\phi}_1 = 0, \quad T_{s_1}.T_\omega\bar{\phi}_1 = T_\omega T_{s_2}\bar{\phi}_1, \quad T_{s_1}.T_\omega^2\bar{\phi}_1 = -T_\omega^2\bar{\phi}_1, \\ T_{s_1}.T_{s_2}\bar{\phi}_1 = 0, \quad T_{s_1}.T_\omega T_{s_2}\bar{\phi}_1 = -T_\omega T_{s_2}\bar{\phi}_1,\ T_{s_1}.T_\omega^2 T_{s_2}\bar{\phi}_1 = -T_\omega^2 T_{s_2}\bar{\phi}_1. \end{array}$$

Supposons que $\epsilon = -1$. La réduction modulo p de la structure entière canonique $L(\lambda_{-1})$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{\bar{\phi}_{-1},\ T_\omega\bar{\phi}_{-1},\ T_\omega^2\bar{\phi}_{-1}, T_{s_1}\bar{\phi}_{-1},\ T_\omega T_{s_1}\bar{\phi}_{-1},\ T_\omega^2 T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}\}.$$

L'action de T_{s_1} y est donnée par

$$\begin{array}{c} T_{s_1}.\bar{\phi}_{-1} = T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}, \quad T_{s_1}.T_\omega\bar{\phi}_{-1} = 0, \quad T_{s_1}.T_\omega^2\bar{\phi}_{-1} = -T_\omega^2\bar{\phi}_{-1} + T_\omega T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}, \\ T_{s_1}.T_{s_1}\bar{\phi}_{-1} = -T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}, \quad T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\bar{\phi}_{-1} = 0,\ T_{s_1}.T_\omega^2 T_{s_1}\bar{\phi}_{-1} = -T_\omega^2 T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}. \end{array}$$

Nous démontrerons ce lemme au paragraphe 2.

Notation 2 L'élément $\bar{\phi}_\epsilon$ est propre pour $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ pour le caractère λ. On a donc un morphisme surjectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{rcl} j_\epsilon : I(\lambda) & \twoheadrightarrow & L(\lambda_\epsilon) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \\ \phi & \mapsto & \bar{\phi}_\epsilon. \end{array}$$

2.7.3 Preuve du théorème 12. Tout d'abord nous remarquons que des calculs élémentaires permettent de s'assurer que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$ sont irréductibles.

Dans le module standard induit par λ, on a, d'après les relations (3) et (4)

$$\begin{cases} E_{\{1\}}\phi = T^*_{s_1}T^*_{s_2}T_\omega\phi = 0, E_{\{2\}}\phi = T^*_{s_2}T_\omega T_{s_1}\phi = 0, E_{\{3\}}\phi = T_\omega T_{s_1}T_{s_2}\phi = 0, \\ E_{\{1,2\}}\phi = T^*_{s_2}T^*_{s_1}T^2_\omega\phi = 0, E_{\{1,3\}}\phi = T^*_{s_1}T^2_\omega T_{s_2}\phi = 0, E_{\{2,3\}}\phi = T^2_\omega T_{s_2}T_{s_1}\phi = 0. \end{cases} \tag{6}$$

D'après le lemme 14, le morphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $\mathcal{P} : I(\lambda) \to I(\lambda)$ est bien défini par $\mathcal{P}(\phi) = (1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi$. Pour vérifier que c'est un projecteur il suffit de s'assurer que $\mathcal{P}^2(\phi) = \mathcal{P}(\phi)$. Or, d'après les relations (6), on a $T_{s_1}T_{s_2}\phi = T_{s_2}T_{s_1}\phi = 0$. D'où,
$\mathcal{P}^2(\phi) = (1 + T_{s_1} + T_{s_2})(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi = (1 + T_{s_1} + T_{s_2} + T_{s_1}T_{s_2} + T_{s_2}T_{s_1})\phi = \mathcal{P}(\phi)$ et l'on a bien la décomposition en somme directe de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$I(\lambda) = Im\mathcal{P} \oplus Ker\mathcal{P}.$$

Le projecteur $\mathcal{P}$ vérifie :

$\mathcal{P}(T_{s_1}\phi) = T_{s_1}(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi = 0,$
$\mathcal{P}(T_{s_1}T_\omega\phi) = T_{s_1}T_\omega(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi = T_\omega T_{s_2}(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}((T_{s_1}+1)T^2_\omega\phi) &= (T_{s_1}+1)T^2_\omega(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi \\ &= T_\omega(1+T_{s_2})T_\omega(1 + T_{s_1} + T_{s_2})\phi \\ &= T_\omega(1+T_{s_2})T_\omega T_{s_1}\phi + T_\omega(1+T_{s_2})T_\omega\phi + T_\omega(1+T_{s_2})T_\omega T_{s_2}\phi \\ &= E^*_{s_2}T_\omega E_{s_1}\phi + (1+T_{s_1})T^2_\omega\phi + E^*_{s_1}T^2_\omega E_{s_2}\phi \\ &= E_{\{2\}}\phi + (1+T_{s_1})T^2_\omega\phi + E_{\{1,3\}}\phi \\ &= 0 + (1+T_{s_1})T^2_\omega\phi + 0. \end{aligned}$$

D'après (Ollivier, lemme 7), le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par

$$\{\phi,\, T_\omega\phi,\, T^2_\omega\phi,\, T_{s_i}\phi,\, T_\omega T_{s_i}\phi,\, T^2_\omega T_{s_i}\phi, i \in \{0,1,2\}\} = \{\phi,\, T_\omega\phi,\, T^2_\omega\phi,\, T^k_\omega T_{s_1}T^l_\omega\phi, k, l \in \{0,1,2\}\}$$

ou encore par $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$ où

$$\mathcal{S}^1 = \{T_{s_1}\phi, T_\omega T_{s_1}\phi, T_\omega^2 T_{s_1}\phi, T_{s_1}T_\omega\phi, T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi, T_\omega^2 T_{s_1}T_\omega\phi\} \subset \ Ker\mathcal{P}, \text{ et}$$

$$\mathcal{S}^2 = \{\mathcal{P}(\phi), T_\omega\mathcal{P}(\phi), T_\omega^2\mathcal{P}(\phi), (T_{s_1}+1)T_\omega^2\phi, T_\omega(T_{s_1}+1)T_\omega^2\phi, T_\omega^2(T_{s_1}+1)T_\omega^2\phi\} \subset \ Im\mathcal{P}.$$

On en déduit que les $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels $Ker\mathcal{P}$ et $Im\mathcal{P}$ sont respectivement engendrés par $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$.

Semi-simplification du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Im\mathcal{P}$: On pose $u = (T_{s_1}+1)T_\omega^2\phi$, $v = \mathcal{P}(\phi)$. Ce sont deux éléments non nuls de $I(\lambda)$. En effet, d'après le lemme 15, leurs images par j_{-1} sont non nulles. D'après les relations (6), on a dans $Im(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned} T_{s_1}u &= 0, & T_{s_1}v &= 0,\\ T_{s_1}(T_\omega u) &= T_\omega T_{s_2}(T_{s_1}+1)T_\omega^2\phi = -T_\omega u, & T_{s_1}(T_\omega v) &= 0,\\ T_{s_1}(T_\omega^2 u) &= T_\omega^3 T_{s_1}(T_{s_2}+1)T_\omega\phi = -T_\omega^2 u, & T_{s_1}(T_\omega^2 v) &= u - T_\omega^2 v. \end{aligned}$$

Donc le sous-module de $Im\mathcal{P}$ engendré par u est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $\tilde{P}_3(z)$ et le quotient de $Im\mathcal{P}$ par ce sous-module est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $P_3(z)$. En particulier, on en déduit que $Im\mathcal{P}$ est de dimension 6 et a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{S}^2$.

Montrons que $Im\mathcal{P}$ est indécomposable. Si $Im\mathcal{P}$ possédait un sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module isomorphe à $P_3(z)$, il possèderait un élément non nul annulé par T_{s_1}, $T_{s_1}T_\omega$ et $(T_{s_1}+1)T_\omega^2$. Or l'intersection de $Im\mathcal{P}$ avec le noyau de l'action de T_{s_1} et celui de l'action de $T_{s_1}T_\omega$ est égale à la droite dirigée par v mais v n'est pas annulé par $(T_{s_1}+1)T_\omega^2$. Donc $Im\mathcal{P}$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module indécomposable et l'on a la suite exacte annoncée dans le théorème.

Semi-simplification de $Ker\mathcal{P}$: On montre maintenant que le système générateur $\mathcal{S}^1$ du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $Ker\mathcal{P}$ en est une base. Grâce aux relations (6), on a

$$\begin{aligned} T_{s_1}.T_{s_1}\phi &= -T_{s_1}\phi, & T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi &= -T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi,\\ T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\phi &= 0, & T_{s_1}.T_\omega^2 T_{s_1}T_\omega\phi &= 0,\\ T_{s_1}.T_\omega^2 T_{s_1}\phi &= -T_\omega^2 T_{s_1}\phi, & T_{s_1}.T_\omega^3 T_{s_1}T_\omega\phi &= -T_\omega^3 T_{s_1}T_\omega\phi. \end{aligned}$$

Il apparaît donc que, s'ils sont non nuls, les sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de $Ker\mathcal{P}$ engendrés respectivement par $T_{s_1}\phi$ et $T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi$ sont isomorphes au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $\tilde{P}_3(z)$. Soit une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{S}^1$,

$$(C) \quad \alpha_1 T_{s_1}\phi + \alpha_2 T_\omega T_{s_1}\phi + \alpha_3 T_\omega^2 T_{s_1}\phi + \beta_1 T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi + \beta_2 T_\omega^2 T_{s_1}T_\omega\phi + \beta_3 T_\omega^3 T_{s_1}T_\omega\phi = 0.$$

Nous allons montrer que $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$.

En appliquant tour à tour l'action de $(T_{s_1}+1)T_\omega$, $T_{s_1}+1$, et $(T_{s_1}+1)T_\omega^2$, la combinaison linéaire (C) donne (C_1) $\alpha_1 T_{s_1}\phi+\beta_1 T_\omega T_{s_1}T_\omega\phi=0$, (C_2) $\alpha_2 T_\omega T_{s_1}\phi+\beta_2 T_\omega^2 T_{s_1}T_\omega\phi=0$, (C_3) $\alpha_3 T_\omega^2 T_{s_1}\phi+\beta_3 zT_{s_1}T_\omega\phi=0$.
L'image de la combinaison linéaire (C_1) (resp. (C_2) resp. (C_3)) par j_{-1} donne $\alpha_1 T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}=1$ (resp $\alpha_2 T_\omega T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}=0$, resp. $\alpha_3 T_\omega^2 T_{s_1}\bar{\phi}_{-1}=0$) d'où, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.
D'après le lemme 15, l'image de la combinaison linéaire (C_1) (resp. (C_2) resp. (C_3)) par j_1 donne alors $\beta_1 T_\omega T_{s_1}T_\omega\bar{\phi}_1=0$ (resp $\beta_2 T_\omega^2 T_{s_1}T_\omega\bar{\phi}_1=0$, resp. $\beta_3 T_{s_1}T_\omega\bar{\phi}_1=0$) d'où, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$.
Par conséquent le système $\mathcal{S}^1$ constitue une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel du $Ker\mathcal{P}$. On a ainsi montré que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Ker\mathcal{P}$ est isomorphe à la somme directe $\tilde{P}_3(z)\oplus\tilde{P}_3(z)$.
Le théorème est démontré.

2.7.4 Preuve du lemme 15 Dans le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon)$ de générateur canonique ϕ_ϵ, on a, d'après les relations (3) et (4),

$$\begin{aligned}
E_{\{1\}}\phi_\epsilon &= T^*_{s_1}T^*_{s_2}T_\omega\phi_\epsilon = q\phi_\epsilon, & E_{\{1,2\}}\phi_\epsilon &= T^*_{s_2}T^*_{s_1}T^2_\omega\phi_\epsilon = q^{1+\epsilon/2}\phi_\epsilon,\\
E_{\{2\}}\phi_\epsilon &= T^*_{s_2}T_\omega T_{s_1}\phi_\epsilon = q^{1+\epsilon/2}\phi_\epsilon, & E_{\{1,3\}}\phi_\epsilon &= T^*_{s_1}T^2_\omega T_{s_2}\phi_\epsilon = q^{1-\epsilon/2}z_0\phi_\epsilon,\\
E_{\{3\}}\phi_\epsilon &= T_\omega T_{s_1}T_{s_2}\phi_\epsilon = z_0 q^{1-\epsilon/2}\phi_\epsilon, & E_{\{2,3\}}\phi_\epsilon &= T^2_\omega T_{s_2}T_{s_1}\phi_\epsilon = z_0 q\phi_\epsilon.
\end{aligned}$$

On traite le cas $\epsilon=1$. Vérifions à l'aide de ces relations que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_1,\, T_\omega\phi_1,\, T_\omega^2\phi_1, T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega^2 T_{s_2}\phi_1\}$ est stable sous l'action de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. Pour ce faire il suffit de vérifier que ce $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module est stable sous l'action de T_{s_1} et $T_\omega^{\pm 1}$ qui engendrent $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. Pour l'action de $T_\omega^{\pm1}$, cette assertion est claire car l'élément central T_ω^3 agit par multiplication par le scalaire non nul z_0. Observons l'action de T_{s_1}.

- $T_{s_1}E_{\{1,3\}}=qT_\omega^2 T_{s_2}$, donc, dans le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1$ qui est sans $\overline{\mathbb{Z}}_p$-torsion, $T_{s_1}.\phi_1=q^{1/2}z_0^{-1}T_\omega^2 T_{s_2}\phi_1$.
- $T_{s_1}T_\omega=T_\omega T_{s_2}$, donc $T_{s_1}.T_\omega\phi_1=T_\omega T_{s_2}\phi_1$.
- $T^*_{s_1}T^2_\omega E_{\{3\}}=qT^3_\omega T_{s_2}$, donc $T_{s_1}.T^2_\omega\phi_1=(q-1)T^2_\omega\phi_1+q^{1/2}T_{s_2}\phi_1$.
- $T_{s_1}.T_{s_2}=T_\omega^{-1}E_{\{3\}}$ donc $T_{s_1}.T_{s_2}\phi_1=q^{1/2}T^2_\omega\phi_1$.
- $T_{s_1}T_\omega T_{s_2}=(q-1)T_\omega T_{s_2}+qT_\omega$ donc $T_{s_1}.T_\omega T_{s_2}\phi_1=(q-1)T_\omega T_{s_2}\phi_1+qT_\omega\phi_1$.
- $T^*_{s_1}T^2_\omega T_{s_2}=E_{\{1,3\}}$ donc $T_{s_1}.T^2_\omega T_{s_2}\phi_1=(q-1)T^2_\omega T_{s_2}\phi_1+q^{1/2}z_0\phi_1$.

On a donc démontré que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_1,\, T_\omega\phi_1,\, T_\omega^2\phi_1, T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega^2 T_{s_2}\phi_1\}$ a une structure de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module. Puisqu'il engendré par le générateur canonique ϕ_1, on en déduit qu'il n'est autre que la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1$. En particulier, c'est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module libre de rang 6, et $\{\phi_1,\, T_\omega\phi_1,\, T_\omega^2\phi_1, T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega T_{s_2}\phi_1,\, T_\omega^2 T_{s_2}\phi_1\}$ en est une base.

Par réduction modulo p des relations ci-dessus, on en déduit la structure du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L(\lambda_1)\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p}\overline{\mathbb{F}}_p$ annoncée par le lemme.

La cas $\epsilon = -1$ se traite de même, en vérifiant tout d'abord que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_{-1},\, T_\omega\phi_{-1},\, T_\omega^2\phi_{-1}, T_{s_1}\phi_{-1},\, T_\omega T_{s_1}\phi_{-1},\, T_\omega^2 T_{s_1}\phi_{-1}\}$ est stable sous l'action de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. On utilise les relations suivantes

- $T_{s_1}.\phi_{-1} = T_{s_1}\phi_{-1}$.
- $T_{s_1}T_\omega E_{\{2\}} = qT_\omega T_{s_1}$, donc $T_{s_1}.T_\omega\phi_{-1} = q^{1/2}T_\omega^2 T_{s_1}\phi_{-1}$.
- $T_{s_1}^* T_\omega^2 E_{\{2,3\}} = qT_\omega^3 T_\omega T_{s_1}$, donc $T_{s_1}.T_\omega^2\phi_{-1} = (q-1)T_\omega^2\phi_{-1} + T_\omega T_{s_1}\phi_{-1}$.
- ${T_{s_1}}^2 = (q-1)T_{s_1} + q$ donc $T_{s_1}.T_{s_1}\phi_{-1} = (q-1)T_{s_1}\phi_{-1} + q\phi_{-1}$.
- $T_{s_1}.T_\omega T_{s_1} = T_\omega^{-1}E_{\{2,3\}}$ donc $T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\phi_{-1} = qT_\omega^2\phi_{-1}$.
- $T_{s_1}^* T_\omega^2 T_{s_1} = T_\omega E_{\{2\}}$ donc $T_{s_1}.T_\omega^2 T_{s_1}\phi_{-1} = (q-1)T_\omega^2 T_{s_1}\phi_1 + q^{1/2}z_0 T_\omega\phi_{-1}$.

2.7.5

Proposition 16 *Soit $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère relevant λ. La réduction modulo p d'une structure entière du module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$.*

Preuve Soit L une structure entière du module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$. Tout constituant irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ admet un caractère central supersingulier égal à $\mu(z, 0, 0)$. Par la propriété universelle des modules standards, on en déduit que les constituants irréductibles de $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ sont des quotients du module standard supersingulier de caractère central $\mu(z, 0, 0)$: d'après le théorème 12, ce sont donc des copies de $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. Par argument de dimension, il y en a 2.

D'après le théorème de Bernstein (Lusztig), une base du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$, de générateur canonique ϕ_0, est donnée par $\{\phi_0, T_{s_1}\phi_0, T_{s_2}\phi_0, T_{s_1}T_{s_2}\phi_0, T_{s_2}T_{s_1}\phi_0, T_{s_1}T_{s_2}T_{s_1}\phi_0\}$. Puisque $T_{s_1}^2 = (q-1)T_{s_1} + q$, la trace de l'action de T_{s_1} sur le module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est égale à $3(q-1)$. La trace de l'action de T_{s_1} sur $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ est donc égale à (-3). Par conséquent, les deux constituants irréductibles de $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ sont respectivement isomorphes à $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. $\square$

Montrons maintenant que tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple supersingulier se relève. On définit un caractère de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ par

$$\theta_{x_1} \mapsto q^{-1/4},\ \theta_{x_2} \mapsto q^{3/4},\ \theta_{x_3} \mapsto z_0 q^{-1/2}.$$

Sa restriction à $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ induit un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ. D'après (Rogawski, 1986), le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est réductible car $q\lambda_0(\theta_{x_1}) = \lambda_0(\theta_{x_2})$. D'après la proposition précédente, il admet deux constituants irréductibles qui relèvent respectivement $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. Ainsi, tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple supersingulier se relève.

Remarque 8 On choisit le relèvement $\lambda_0 : \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ de λ donné dans la preuve de la proposition 5. D'après le critère d'irréductibilité pour les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards, le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est irréductible et ne nous donne donc pas de relèvement pour les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples supersinguliers.

3 Modules simples sur l'algèbre de Hecke régulière

3.1 Présentation de $\mathcal{H}_R(G,\sigma_\gamma)$. Soit γ l'orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ d'un $\mathbb{F}_q$-caractère régulier du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ D'après la proposition 2, la R-algèbre de Hecke de σ_γ s'identifie à la R-algèbre $\epsilon_\gamma\mathcal{H}_R(G,I(1))$ d'unité ϵ_γ. Par cette identification, on note $T_w \in \mathcal{H}_R(G,\sigma_\gamma)$ l'élément correspondant à $\epsilon_\gamma T_w^{(1)}$, où pour $w \in \tilde{W}$, on désigne par $T_w^{(1)} \in \mathcal{H}_R(G,I(1))$ la fonction caractéristique de la double classe $I(1)wI(1)$. D'après (Vignéras, 2003, Corollaire 4), l'idempotent ϵ_γ se décompose dans $\mathcal{H}_R(G,I(1))$ en une somme d'idempotents orthogonaux $(\epsilon_\chi)_{\chi\in\gamma}$ et l'on a :

Théorème 17 *La R-algèbre $\mathcal{H}_R(G,\sigma_\gamma)$ est le R-module libre de base $\{T_w,\ \epsilon_\chi\}_{w\in\tilde{W},\chi\in\gamma}$ avec les relations :*
(1) Pour $\chi,\ \chi' \in \gamma$, $\chi \neq \chi'$, on a $\epsilon_\chi^2 = \epsilon_\chi$, $\epsilon_\chi\epsilon_{\chi'} = 0$, $\sum\limits_{\chi\in\gamma}\epsilon_\chi = 1$.
(2) Pour $w \in \tilde{W}$, $\chi \in \gamma$ $T_w\epsilon_\chi = \epsilon_{w\chi}T_w$.
(3) Pour $w,\ w' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a $T_wT_{w'} = T_{ww'}$.
(4) Pour $i \in \{0,1,2\}$, on a $T_{s_i}^2 = q_R$.

Nous allons noter $H_R(\gamma) = \mathcal{H}_R(G,\sigma_\gamma)$ et nous en étudions les modules simples ayant un caractère central lorsque $R = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Remarque 9 On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} F : \overline{\mathbb{Q}}_p[\tilde{W}] & \longrightarrow & H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(\gamma) \\ w & \longmapsto & q^{-\ell(w)/2}T_w \end{array}.$$

C'est un morphisme d'anneaux injectif. En effet, d'après les relations (3) et (4) du théorème 17, les éléments $\{F(w)\}_{w\in\tilde{W}}$ vérifient les mêmes relations que les $\{w\}_{w\in\tilde{W}}$. Soit $w = w_0x \in \tilde{W} = W_0.X$. On note $E_w^{(1)}$ l'élément de la base de Bernstein entière de la $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori définie par (Vignéras, 2003, 1.4). Dans $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(G,I(1))$ il s'écrit

$$E_w^{(1)} = q^{(\ell(w)-\ell(w_0)+\ell(z)-\ell(y))/2}T_{w_0}^{(1)}T_y^{(1)}{T_z^{(1)}}^{-1},$$

avec $y,\ z \in X$, dominants tels que $x = y - z$. Donc l'image dans $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(\gamma)$ de $\epsilon_\gamma E_w^{(1)}$ est

$$q^{(\ell(w)-\ell(w_0)+\ell(z)-\ell(y))/2}T_{w_0}T_yT_z^{-1} = q^{\ell(w)/2}F(w_0)F(y)F(z)^{-1} = q^{\ell(w)/2}F(w) = T_w.$$

Par conséquent, pour $R = \overline{\mathbb{Q}}_p$, $\overline{\mathbb{Z}}_p$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, l'image par l'isomorphisme $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R(G, I(1)) \simeq H_R(\gamma)$ de $\epsilon_\gamma E_w^{(1)}$ n'est autre que T_w.

En particulier, la sous-R-algèbre commutative de Bernstein $\epsilon_\gamma \mathcal{A}_R^{(1)}$ de $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R(G, I(1))$, de base $\{E_x^{(1)}\epsilon_\chi,\ x \in X, \chi \in \gamma\}$, a pour image la sous-$R$-algèbre commutative de $H_R(\gamma)$ de base $\{T_x \epsilon_\chi,\ x \in X, \chi \in \gamma\}$. D'après (Vignéras, 2003, 1.4), cette dernière est donc munie d'une action de $\tilde{W}$, qui se factorise par celle de W_0, et qui est compatible avec la structure de R-algèbre. Explicitement, cette action est décrite de la façon suivante : pour $w = w_0 x \in \tilde{W} = W_0.X$, $w.T_x = T_{w_0 x w_0^{-1}}$, $\forall x \in X$; $\;w.\epsilon_\chi = \epsilon_{w_0.\chi}\ \forall \chi \in \gamma$.

3.2 La sous-algèbre commutative B_γ. Désormais $R = \overline{\mathbb{F}}_p$. On note B_γ la sous-algèbre commutative de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{T_x \epsilon_\chi,\ x \in X, \chi \in \gamma\}$.

Pour $I \subset \{1, 2, 3\}$, on désigne comme précédemment par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I et de 1 ailleurs. On notera T_I l'élément T_{x_I}. En particulier, $T_{\{1,2,3\}} = T_\omega^3$. D'après la remarque 9 et (Vignéras, 2003, Proposition 9) :

Proposition 18 – *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative B_γ est engendrée par $\{T_I,\ \epsilon_\chi,\ T_\omega^{\pm 3}\}_{\chi \in \gamma, I \subsetneq \{1,2,3\}}$ avec les relations (1) du théorème 17 entre les ϵ_χ et*

$$T_I T_J = 0 \text{ si } I \not\subset J \text{ et } I \not\subset I.$$

– *Elle contient le centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ égal à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_p[T_\omega^{\pm 3}, Z_1(\gamma), Z_2(\gamma)]$, où pour $i \in \{1, 2\}$,*

$$Z_i(\gamma) = \sum_{I \subset \{1,2,3\}, |I| = i} T_I.$$

– *L'algèbre $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est de type fini sur son centre.*

3.3 Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-modules simples.

Soient $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$, $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $\mu(z, y, y')$ le caractère du centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ déterminé par

$$T_\omega^3 \mapsto z,\ Z_1(\gamma) \mapsto y,\ Z_2(\gamma) \mapsto y'.$$

On dit de $\mu(z, y, y')$ qu'il est *régulier* si $yy' \neq 0$, *singulier* sinon. Dans le cas particulier où $(y, y') = (0, 0)$ on dit que $\mu(z, y, y')$ est *supersingulier.*

Nous donnons maintenant une liste $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules de caractère central $\mu(z, y, y')$. Pour les décrire, il suffit de donner l'action de $\{\epsilon_\chi\}_{\chi \in \gamma}$, T_{s_1} et T_ω car T_ω^3 agit par le scalaire $z \neq 0$ et car la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est engendrée par l'ensemble $\{T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}, \{\epsilon_\chi\}_{\chi \in \gamma}\}$.

Modules ayant un caractère central régulier :

Pour $yy' \neq 0$, $\chi \in \gamma$, on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $K_6(z, y, y', \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v, w, T_\omega w, T_\omega^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$ et

$T_{s_1}v = w$, $T_{s_1}T_\omega v = yy'^{-1}T_\omega^2 w$, $T_{s_1}T_\omega^2 v = 0$,
$T_{s_1}w = 0$, $T_{s_1}T_\omega w = y'z^{-1}T_\omega^2 v$, $T_{s_1}T_\omega^2 w = 0$.

Modules ayant un caractère central singulier, non-supersingulier :

- Pour $y \neq 0$, $y' = 0$, $\chi \in \gamma$ on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $L_6(z, y, 0, \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v, w, T_\omega w, T_\omega^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$, et
  $T_{s_1}v = 0$, $T_{s_1}T_\omega v = T_\omega w$ $T_{s_1}T_\omega^2 v = 0$,
  $T_{s_1}w = yz^{-1}T_\omega^2 v$, $T_{s_1}T_\omega w = 0$, $T_{s_1}T_\omega^2 w = 0$.
- Pour $y = 0$, $y' \neq 0$, $\chi \in \gamma$ on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $\tilde{L}_6(z, 0, y', \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v, w, T_\omega w, T_\omega^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$ et
  $T_{s_1}v = w$, $T_{s_1}T_\omega v = 0$, $T_{s_1}T_\omega^2 v = 0$,
  $T_{s_1}w = 0$, $T_{s_1}T_\omega w = y'z^{-1}T_\omega^2 v$,$T_{s_1}T_\omega^2 w = 0$.

Modules ayant un caractère central supersingulier :

Soit $\chi \in \gamma$. Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $P(z, 0, 0, \chi)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, T_\omega v, T_\omega^2 v\}$; T_{s_1} agit par zéro sur $P(z, 0, 0, \chi)$ et $\epsilon_\chi v = v$.

Théorème 19 *Soient $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi \in \gamma$. Pour tout $w \in W_0$, on a les isomorphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules suivants :*

$$K_6(z, y, y', \chi) \simeq K_6(z, y, y', w\chi) \text{ avec } yy' \neq 0,$$
$$L_6(z, y, 0, \chi) \simeq L_6(z, y, 0, w\chi) \text{ avec } y \neq 0, \qquad \tilde{L}_6(z, 0, y', \chi) \simeq \tilde{L}_6(z, 0, y', w\chi) \text{ avec } y' \neq 0,$$
$$P(z, 0, 0, \chi) \simeq P(z, 0, 0, s_2 s_1 \chi) \simeq P(z, 0, 0, s_1 s_2 \chi).$$

Les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $P(z, 0, 0, \chi)$ et $P(z, 0, 0, s_1\chi)$ ne sont pas isomorphes.

Pour tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$, il existe $\chi \in \gamma$ tel que ce module est isomorphe à l'un des modules de la liste suivante :

$$K_6(z, y, y', \chi) \text{ si } yy' \neq 0,$$
$$L_6(z, y, 0, \chi) \text{ si } y \neq 0\ y' = 0,\ \tilde{L}_6(z, 0, y', \chi) \text{ si } y = 0,\ y' \neq 0,$$
$$P(z, 0, 0, \chi) \text{ si } (y, y') = (0, 0).$$

La suite de la partie 3 est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3.4 Modules standards pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$.

3.4.1 Caractères de B_γ. Un caractère de B_γ est un morphisme d'algèbres $B_\gamma \to \overline{\mathbb{F}}_p$. L'ensemble des caractères de B_γ hérite d'une action de $\tilde{W}$ qui se factorise par celle de W_0. Remarquons que puisque γ est une orbite régulière, un caractère de B_γ est distinct de chacun de ses conjugués sous l'action de $\tilde{W}$.

Soit λ un caractère de B_γ. D'après les relations de commutation dans B_γ (proposition 18), il existe un drapeau, appelé *drapeau de λ*

$$\emptyset \subsetneq I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_r \subsetneq I_{r+1} = \{1, 2, 3\},$$

tel que pour tout $\emptyset \subsetneq I \subset \{1,2,3\}$, $\lambda(T_I) \neq 0$ si et seulement si I est l'un des éléments $I_1, ..., I_{r+1}$ de ce drapeau. Le caractère λ est alors entièrement déterminé par la donnée de $\{\lambda(T_{I_i})\}_{i=1,..,r+1}$ et de l'unique élément $\chi \in \gamma$ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) \neq 0$.

Définition 4 *On dit que λ est*
- régulier *si le drapeau est complet c'est-à-dire $r = 2$.*
- singulier *sinon,*
- supersingulier *si le drapeau est trivial, c'est-à-dire si $\lambda(T_I) = 0$ pour $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1,2,3\}$.*

Remarque 10 Le caractère λ est régulier (resp. singulier, resp. supersingulier) si et seulement si sa restriction au centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est un caractère régulier (resp. singulier, resp. supersingulier) au sens du paragraphe 3.3.

3.4.2 Sous-espaces λ-isotypiques. Soient V un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module, λ un caractère de B_γ.

Définition 5 *On note V_λ le sous-espace λ-isotypique de V :*

$$V_\lambda = \{v \in V,\ \ b.v = \lambda(b)v\ \ \forall\, b \in B_\gamma\}.$$

Lemme 20 *Soit $w \in \tilde{W}$. On a $T_w.V_\lambda \subset V_{w.\lambda}$.*

Preuve Il suffit de montrer que $T_\omega.V_\lambda \subset V_{\omega.\lambda}$ et $T_{s_1}.V_\lambda \subset V_{s_1.\lambda}$ car $\tilde{W}$ est engendré par $\{s_1,\, \omega^{\pm 1}\}$. Soient $\chi \in \gamma$, $x \in X$.
On a d'une part $\epsilon_\chi T_\omega = T_\omega \epsilon_{\omega^{-1}\chi}$ d'après les relations (2) du théorème 17, et $T_x T_\omega = T_{\omega\,\omega^{-1}x\omega} = T_\omega T_{\omega^{-1}x\omega}$. Par conséquent, on a bien $T_\omega.V_\lambda \subset V_{\omega.\lambda}$.
D'autre part, on a $\epsilon_\chi T_{s_1} = T_{s_1}\epsilon_{s_1\chi}$. De plus, si $\ell(xs_1) = \ell(x) + 1$, on a $T_{xs_1} = T_x T_{s_1} = T_{s_1} T_{s_1xs_1}$; ainsi, $T_x T_{s_1} = T_x T_{s_1} v = T_{s_1} T_{s_1xs_1}$. Si $\ell(xs_1) = \ell(x) - 1$, on a $T_{s_1xs_1} = T_{s_1} T_{xs_1}$, $T_x = T_{xs_1} T_{s_1}$; ainsi $T_x T_{s_1} = 0 = T_{s_1} T_{s_1xs_1}$. D'où, $T_{s_1}.V_\lambda \subset V_{s_1.\lambda}$. $\square$

On déduit du lemme 20 que si V est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module engendré par V_λ, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel V est la somme directe de ses sous-espaces $w.\lambda$-isotypiques non nuls, avec w parcourant W_0.

Lemme 21 *Si le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module V est engendré par un vecteur $v \in V_\lambda$, alors on a $dim V_\lambda = 1$.*

Preuve Soit χ l'unique élément de γ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) = 1$. Puisque $v \in V_\lambda$ on a $\epsilon_\chi v = v$. De plus, pour tout élément non trivial $w \in W_0$, les caractères $w\chi$ et χ sont distincts donc $\epsilon_{w\chi} v = (\epsilon_{w\chi}\epsilon_\chi)v = 0$.
Soit u un élément non nul de V_λ. On a en particulier $\epsilon_\chi u = u$. Puisque v engendre V, il existe une famille non nulle $\{\beta_{\tilde{w}}\}_{\tilde{w}}$ indexée par les éléments $\tilde{w} = wx \in W_0.X = \tilde{W}$ telle que $u = \sum_{\tilde{w}} \beta_{\tilde{w}} T_{\tilde{w}} v$. Ainsi $u = \epsilon_\chi u = \sum_{\tilde{w}} \beta_{\tilde{w}} T_{\tilde{w}}\, \epsilon_{w^{-1}\chi}\, v = \sum_{x \in X} \beta_x T_x v$. D'où, $u \in \overline{\mathbb{F}}_p v$. $\square$

3.4.3 Propriétés des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards. Soit λ un caractère de B_γ.

Définition 6 *Le module standard induit par* λ *est le* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-module* $I(\lambda) = H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma) \otimes_{B_\gamma} \lambda$.

On note $\varphi_\lambda = 1 \otimes 1 \in I(\lambda)$ le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$. C'est un élément λ-isotypique.

Les propriétés suivantes proviennent du fait que $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est de type fini sur son centre et des lemmes 20 et 21.

(i) Le module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Il est égal à la somme directe de ses sous-espaces $w.\lambda$-isotypiques non nuls, pour w parcourant W_0. Sa partie λ-isotypique est la droite dirigée par φ_λ.

(ii) Tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un module standard.

Proposition 22 – *Le* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-module standard* $I(\lambda)$ *admet un unique quotient irréductible non nul noté* V^λ.
- *Soit* $w \in W_0$. *On a un isomorphisme de* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-modules* $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$ *si et seulement si l'espace* $w.\lambda$ *isotypique* $V^\lambda_{w.\lambda}$ *est non nul.*
- *On a les isomorphismes* $I(\lambda) \simeq I(\omega.\lambda) \simeq I(\omega^2.\lambda)$. *Ainsi, la dimension de l'espace vectoriel* V^λ *est supérieure ou égale à* 3.
- *On a la suite exacte de* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-modules*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{w \in W_0, I(\lambda) \not\simeq I(w.\lambda)} I(\lambda)_{w.\lambda} \longrightarrow I(\lambda) \longrightarrow V^\lambda \longrightarrow 0.$$

La preuve de la proposition 22 repose sur les lemmes suivants :

Lemme 23 *Soit* $w \in W_0$. *On suppose qu'il existe* d, $d' \in X$ *tels que* $T_{w^{-1}d'} T_{wd} \varphi_\lambda \neq 0$. *Alors on a un morphisme injectif de* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-modules*

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda) & \overset{A}{\hookrightarrow} & I(w.\lambda) \\ \varphi_\lambda & \longmapsto & T_{w^{-1}d'} \varphi_{w.\lambda}. \end{array}$$

En particulier, on a les isomorphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$*-modules :* $I(\lambda) \simeq I(\omega.\lambda) \simeq I(\omega^2.\lambda)$.

Preuve du lemme 23 Soient λ, w, d, d' vérifiant les hypothèses du lemme. D'après le lemme 20, on a des morphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules A et B bien définis par :

$$\begin{array}{ccccc} I(\lambda) & \xrightarrow{A} & I(w.\lambda) & \xrightarrow{B} & I(\lambda) \\ \varphi_\lambda & \longmapsto & T_{w^{-1}d'} \varphi_{w.\lambda} & & \\ & & \varphi_{w.\lambda} & \longmapsto & T_{wd} \varphi_\lambda \end{array}$$

De plus $B \circ A(\varphi_\lambda) = T_{w^{-1}d'}T_{wd}\varphi_\lambda$: c'est un élément non nul appartenant à l'espace λ-isotypique $I(\lambda)_\lambda$. D'après le lemme 21, $B \circ A$ est une homothétie de rapport non nul. Ainsi, A est une injection $I(\lambda) \hookrightarrow I(w.\lambda)$.

Les isomorphismes annoncés sont ensuite obtenus en choisissant $w = s_2 s_1$, $d = s_1 s_2 \omega$, $d' = s_2 s_1 \omega^2$, car alors $T_{w^{-1}d'}T_{wd}\varphi_\lambda = T_\omega^3 \varphi_\lambda \neq 0$. D'après ce qui précède on a donc un morphisme injectif $I(\lambda) \hookrightarrow I(\omega.\lambda)$. L'isomorphisme est obtenu en réitérant ce raisonnement pour $\omega.\lambda$ puis $\omega^2.\lambda$ et en notant que l'élément central ω^3 laisse invariant le caractère λ. $\square$

Lemme 24 *Soit V un quotient irréductible non nul du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard $I(\lambda)$. Pour $w \in W_0$, on a un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$ si et seulement si l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul.*

Un quotient irréductible non nul V de $I(\lambda)$ possède un espace λ-isotypique non nul. On déduit de ce lemme et du précédent que les espaces $\omega.\lambda$-isotypique et $\omega^2.\lambda$-isotypique de V sont également non nuls de sorte que V est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 3.

Preuve du lemme 24 D'après le lemme 21 et puisque le quotient non nul V de $I(\lambda)$ est irréductible, son espace λ-isotypique est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 1. Soient v une base de V_λ et $w \in W_0$.

Supposons $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$. En particulier V est un quotient non nul de $I(w.\lambda)$ donc l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul.
Réciproquement, supposons que l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul. Puisque V est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible, il est engendré par $v \in V_\lambda$. D'après le lemme 20, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $V_{w.\lambda}$ est engendré par les éléments de la forme $\{T_{wd}v\}_{d \in X}$. Il existe donc $d \in X$, tel que $u := T_{wd}v \neq 0$. Puisque u engendre lui aussi le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible V, l'élément v s'écrit $v = \sum_{z \in \tilde{W}} a_z T_z u$. Mais γ est une orbite régulière, donc, par un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 21 il existe $d' \in X$ tel que $T_z u \neq 0$ pour $z = w^{-1}d'$. Les hypothèses du lemme 23 sont dès lors vérifiées par w, d, d', λ. On a donc une injection de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \hookrightarrow I(w.\lambda)$. Par symétrie des rôles, et puisque les modules standards sont de dimension finie, on en déduit un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules entre $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$. $\square$

Achevons la preuve de la proposition 22. Il reste à s'assurer de l'unicité du quotient irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard induit par λ.

Soient λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ, V un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module quotient irréductible non nul du module standard $I(\lambda)$. On note F la projection $F : I(\lambda) \twoheadrightarrow V$. On rappelle que le module standard $I(\lambda)$ est la somme directe comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de ses composantes $w.\lambda$-isotypiques non nulles, pour w parcourant W_0.

Soit $w \in W_0$. D'après le lemme 24, si les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$ ne sont pas isomorphes alors la composante $w.\lambda$-isotypique de $I(\lambda)$ est incluse dans le noyau de F. Si en revanche ils sont isomorphes alors la composante $w.\lambda$-isotypique de $I(\lambda)$ est de dimension 1 et $I(\lambda)_{w.\lambda} \cap Ker\, F = \{0\}$. Donc $Ker\, F$ est déterminé par λ :

$$Ker\, F = \bigoplus_{w \in W_0,\, I(\lambda) \not\simeq I(w.\lambda)} I(\lambda)_{w.\lambda}.$$

Par conséquent, $I(\lambda)$ possède un unique quotient irréductible non nul et la proposition 22 est démontrée.

Remarque 11 Jusqu'ici, on ne s'est pas réellement servi du fait que $n = 3$. Les résultats de la partie 3 précédents se généralisent à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.4.4 Classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules simples.

Soient $\lambda : B_\gamma \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère et $\chi \in \gamma$ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) = 1$. On note $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$, $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$ les éléments tels que $z = \lambda(T_\omega^3)$, $y = \lambda(Z_1(\gamma))$, $y' = \lambda(Z_2(\gamma))$.

Nous déterminons l'unique quotient irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard $I(\lambda)$, selon la nature du caractère λ. A cette occasion, nous déterminons l'ensemble des éléments $w \in W_0$ tels que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$ sont isomorphes. D'après la proposition 18 et les propriétés des modules standards, cette étude fournit la classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules simples ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$ et prouve le théorème 19.

λ **est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ régulier** Puisque λ est régulier et quitte à échanger λ et $s_i.\lambda$, il existe un élément $I \subset \{1, 2, 3\}$ du drapeau de λ tel que $I = I_0 \cup \{i+1\}$, avec $i \notin I_0$. D'après l'appendice de (Vignéras, 2002), on a alors $\ell(x_I s_i) = \ell(x_I) - 1$, d'où $T_I = T_{x_I s_i} T_{s_i} = T_{s_i x_{I_0 \cup \{i\}}} T_{s_i}$ et $T_{I_0 \cup \{i\}} = T_{s_i} T_{x_I s_i}$.

Avec $w = s_i$, $d = 1$, $d' = x_{I_0 \cup \{i\}}$, on a alors $T_{w^{-1}d'} T_{wd} \varphi_\lambda = T_I \varphi_\lambda = \lambda(T_I)\varphi_\lambda \neq 0$. Le lemme 23 fournit alors un morphisme injectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \hookrightarrow I(s_i.\lambda)$.

En échangeant les rôles de λ et $s_i.\lambda$ et avec $w = s_i$, $d = x_{I_0 \cup \{i\}}$, $d' = 1$, on obtient de même, avec le lemme 23, un morphisme injectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(s_i.\lambda) \hookrightarrow I(\lambda)$.

Or, les modules standards sont de dimension finie. Ainsi $I(\lambda)$ et $I(s_i.\lambda)$ sont isomorphes. (Comparer avec (Ollivier, Proposition 8)). Puisque W_0 est engendré par s_1 et s_2, on en déduit que pour tout $w \in W_0$, le module standard induit par $w.\lambda$ est isomorphe au module standard induit par λ. De plus, d'après la proposition 22, le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard induit par λ est irréductible de dimension 6.

Pour décrire plus précisément le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$, on peut donc supposer que le drapeau de λ est dominant, c'est-à-dire que $T_{\{3\}}\phi_\lambda = T_\omega T_{s_1} T_{s_2} \phi_\lambda = y\phi_\lambda$, et $T_{\{2,3\}}\phi_\lambda = T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \phi_\lambda = y'\phi_\lambda$. De ces égalités on déduit aisément que $I(\lambda)$ est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $K_6(z, y, y', \chi)$ *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $T_{s_1}\varphi_\lambda \mapsto w$.

λ **est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ supersingulier** On définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module de dimension 3 suivant :

$$P(z,0,0,\chi) = \bigoplus_{k\in\{0,1,2\}} \overline{\mathbb{F}}_p T_\omega^k v$$

où v est un vecteur λ-propre pour B_γ et T_{s_1} agit par zéro sur $P(z,0,0,\chi)$. On vérifie, sachant que χ est régulier, que c'est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible engendré par v. Par conséquent, c'est l'unique quotient irréductible de $I(\lambda)$.

Remarquons que pour $k \in \{0,1,2\}$, l'espace $\omega^k.\lambda$-isotypique de ce module est égal à la droite dirigée par $T_\omega^k v$. On en déduit, par la proposition 22, que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(s_1.\lambda)$ ne sont pas isomorphes et que, à z fixé, il y a deux modules simples supersinguliers non isomorphes : $P(z,0,0,\chi)$ et $P(z,0,0,s_1\chi)$.

λ **est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère singulier non supersingulier** Puisque λ n'est ni régulier, ni supersingulier, le drapeau de λ est fixé par exactement une des deux transpositions s_1 et s_2. Choisissons $i \in \{1,2\}$ tel que s_i ne fixe pas le drapeau de λ.

Quitte à échanger λ et $s_i.\lambda$, on peut supposer que le drapeau de λ possède un élément $I \subset \{1,2,3\}$ tel que $I = I_0 \cup \{i+1\}$ et $i \notin I_0$. On procède alors comme dans le cas régulier pour montrer que l'on a un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \simeq I(s_i.\lambda)$.

Or nous avons vu que λ, $\omega.\lambda$ et $\omega^2.\lambda$ engendrent des modules standards isomorphes et l'on rappelle que ω agit sur le caractère λ comme le cycle s_2s_1. Ainsi, puisque s_i et s_2s_1 engendrent W_0, pour tout $w \in W_0$, le module standard induit par $w.\lambda$ est isomorphe au module standard induit par λ. De plus, c'est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible.

Pour décrire plus précisément le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$, on peut donc supposer que le drapeau de λ est dominant, c'est-à-dire que $T_{\{3\}}\phi_\lambda = T_\omega T_{s_1} T_{s_2}\phi_\lambda = y\phi_\lambda$, et $T_{\{2,3\}}\phi_\lambda = T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1}\phi_\lambda = y'\phi_\lambda$. De ces égalités on déduit aisément que $I(\lambda)$ est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $L_6(z,y,0,\chi)$ si $y'=0$, *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $T_{s_2}\varphi_\lambda \mapsto w$, ou bien à $\tilde{L}_6(z,0,y',\chi)$ si $\lambda(y)=0$, *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $T_{s_1}\varphi_\lambda \mapsto w$.

Remarque 12 Suite à la remarque 11, observons ce qu'on aurait obtenu en travaillant avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- On montrerait de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, que le module standard induit par un caractère régulier est irréductible.
- Le cas où λ est supersingulier est également accessible pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Comme pour $n=3$, on montrerait que, puisque l'action du cycle $s_{n-1}...s_2s_1$ partitionne γ en $n!/n$ orbites, on a $(n-1)!$ module simples supersinguliers pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F),\sigma_\gamma)$, avec γ orbite régulière dans $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$.
  D'après (Vignéras, 2003, Théorème 5), cela revient à dire que tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple supersingulier contient un caractère pour la sous-algèbre de Hecke affine ce qui est conforme à la conjecture 2 (*loc.cit*).

4 Modules simples sur l'algèbre de Hecke semi-régulière

Soit γ l'orbite d'un caractère semi-régulier $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. Nous allons étudier la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de la représentation σ_γ. D'après la proposition 2, on peut supposer que $\chi = 1 \otimes 1 \otimes \alpha$ où l'on désigne par 1 le caractère trivial de $\mathbb{F}_q^*$ et par α un caractère non trivial de $\mathbb{F}_q^*$.

D'après la proposition 1, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de σ_γ

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma) = End_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G \chi \oplus ind_I^G s_2\chi \oplus ind_I^G s_1 s_2 \chi)$$

est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées de taille 3 à cœfficients dans l'algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$. On a dès lors une équivalence de catégories abéliennes entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-modules et celle des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules.

4.1 Présentation de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$. Nous reprenons les notations du paragraphe 1.2. En particulier, pour tout $g \in G$ entrelaçant le caractère χ, on note $T_{g,\chi} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ l'élément de l'algèbre de Hecke support IgI et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en g.

Théorème 25 *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ est engendrée par les éléments*

$$S = T_{s_1,\chi}, \;\; T = T_{t_0,\chi}, \;\; T^* = T_{t_0^{-1},\chi}, \;\; Z^{\pm 1} = T_{z_0^{\pm 1},\chi}$$

où

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; z_0 = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

avec les relations

$$S^2 = -S, \; TT^* = T^*T = 0,$$

$$T^2, \; T^{*2}, \; Z \textit{ sont des éléments centraux.}$$

Les éléments $Y = TS + (S+1)T$ et $Y^* = T^*S + (S+1)T^*$ sont également dans le centre de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$.

Le théorème 25 est démontré au paragraphe 4.

4.2 Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples ayant un caractère central.

Soient y, y^*, t, t^*, $z \in \overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant $z \neq 0$, $tt^* = 0$. Nous donnons une liste de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules sur lesquels les éléments centraux Y, Y^*, T^2, T^{*2}, Z agissent respectivement par multiplication par les scalaires y, y^*, t, t^*, z.

Caractères - $M_1(y,z)$: $S\mapsto 0,\ T\mapsto y,\ T^*\mapsto 0,\ Z\mapsto z$, avec $y,z\neq 0$. Alors, $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(y,0,y^2,0,z)$.

- $\tilde{M}_1(y,z)$: $S\mapsto -1,\ T\mapsto -y,\ T^*\mapsto 0,\ Z\mapsto z$, avec $y,z\neq 0$. Alors, $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(y,0,y^2,0,z)$.
- $M_1^*(y^*,z)$: $S\mapsto 0,\ T\mapsto 0,\ T^*\mapsto y^*,\ Z\mapsto z$, avec $y^*,z\neq 0$. Alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(0,y^*,0,y^{*2},z)$.
- $\tilde{M}_1^*(y^*,z)$: $S\mapsto -1,\ T\mapsto 0,\ T^*\mapsto y^*,\ Z\mapsto z$, avec $y^*,z\neq 0$. Alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(0,y^*,0,y^{*2},z)$.
- $P_1(z)$: $S\mapsto 0,\ T\mapsto 0,\ T^*\mapsto 0,\ Z\mapsto z$, avec $z\neq 0$. Alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(0,0,0,0,z)$.
- $\tilde{P}_1(z)$: $S\mapsto -1,\ T\mapsto 0,\ T^*\mapsto 0,\ Z\mapsto z$, avec $z\neq 0$. Alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(0,0,0,0,z)$.

Modules de dimension 2 - $M_2(y,t,z)$ avec $t,z\neq 0$.

Dans une base de $M_2(y,t,z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S=\begin{pmatrix}-1 & y\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}0 & t\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ T^*=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(y,0,t,0,z)$.

C'est un module simple si et seulement si $y^2\neq t$.

Si $y^2=t$, $M_2(y,t,z)$ a pour sous-module le caractère $M_1(y,z)$ et pour quotient le caractère $\tilde{M}_1(y,z)$.

- $M_2^*(y^*,t^*,z)$ avec $t^*,z\neq 0$.

Dans une base de $M_2^*(y^*,t^*,z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S=\begin{pmatrix}-1 & y^*\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T^*=\begin{pmatrix}0 & t^*\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(0,y^*,0,t^*,z)$

C'est un module simple si et seulement si $y^{*2}\neq t^*$.

Si $y^{*2}=t$, $M_2^*(y^*,t^*,z)$ a pour sous-module le caractère $M_1(y^*,z)$ et pour quotient le caractère $\tilde{M}_1(y^*,z)$.

- $N_2(y,y^*,z)$ avec $z\neq 0$.

Dans une base de $N_2(y,y^*,z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}0 & y\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T^*=\begin{pmatrix}0 & y^*\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*,z)=(y,y^*,0,0,z)$.

C'est un module simple si et seulement si $(y,y^*)\neq(0,0)$.

Si $(y,y^*)=(0,0)$, $N_2(y,y^*,z)$ a pour sous-module le caractère $\tilde{P}_1(z)$ et pour quotient le caractère $P_1(z)$.

Puisqu'ils sont de dimension finie, les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules simples de cette liste possèdent un caractère central. La lecture de ce caractère central nous assure qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre deux tels modules simples.

Théorème 26 *Un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module simple ayant un caractère central est isomorphe à l'un des modules simples de la liste précédente.*

Le théorème 26 est démontré au paragraphe 4.

On appelle supersinguliers les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules (resp. les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-modules) ayant un caractère central "aussi nul que possible". Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. On a deux $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules simples supersinguliers non isomorphes tels que l'élément central inversible Z agit par multiplication par z. Ce sont les caractères $P_1(z)$ et $\tilde{P}_1(z)$.

Fixons à z l'action de l'élément central inversible $\epsilon_\gamma T^{(1)}_{\omega^3} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$, où $T^{(1)}_{\omega^3} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ correspond à la double classe $I(1)\omega^3$. Les modules simples supersinguliers de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$ sont les deux modules simples non isomorphes provenant de $P_1(z)$ et $\tilde{P}_1(z)$ par équivalence de Morita. Ils sont de dimension 3.

Remarque 13 La détermination des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules simples effectuée ici est "directe" (preuve du théorème 26) : elle ne passe pas par la semi-simplification de modules standards.

4.3 Démonstration du théorème 25.

4.3.1 On note L le sous-groupe de Levi standard de G isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$. On désigne par $B_1(F)$ le sous-groupe parabolique supérieur associé de décomposition de Lévi $B_1(F) = LU$. Le sous-groupe parabolique opposé est noté $\bar{B}_1(F) = L\bar{U}$.

On se réfère à (Vignéras, 1998, II). Le sous-groupe d'Iwahori I de G admet une décomposition selon $(B_1(F), \bar{B}_1(F))$, c'est-à-dire

$$I = I^- I_L I^+, \quad I_L = I \cap L, \quad I^- = I \cap \bar{U}, \quad I^+ = I \cap U.$$

Le caractère χ est trivial sur I^- et I^+.

On appelle *positifs* les éléments $m \in L$ tels que $mI^+m^{-1} \subset I^+$ et $m^{-1}I^-m \subset I^-$. On note leur ensemble L^+. Ce sont les éléments de L de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d, $e \in F$ tels que $val(e) \leq min(val(a),\ val(b),\ val(c),\ val(d))$.

4.3.2 On choisit $\alpha_0 : \mathbb{F}_q^* \to O_E^*$ un relèvement du caractère non trivial $\alpha : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ où

O_E est l'anneau des entiers d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$. Le caractère $\chi_0 = 1 \otimes 1 \otimes \alpha_0 : T(\mathbb{F}_q) \to O_E^*$ est un relèvement de χ. On considère χ_0 comme un caractère de I trivial sur $I(1)$ à valeurs dans O_E^* ou bien E^*. On a :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi) = \mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0) \otimes_{O_E} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

On note χ_{0L} la restriction de χ_0 à I_L. D'après (Vignéras, 2001, 1.), l'algèbre $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$ est engendrée par

$$T_0^{\pm 1} = T_{t_0^{\pm 1}, \chi_{0L}}, \;\; S_0 = T_{s_1, \chi_{0L}}$$
$$Z_0^{\pm 1} = T_{z^{\pm 1}, \chi_{0L}}$$

où

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix},$$

avec les relations

$$(S_0 + 1)(S_0 - q) = 0, \; T_0^2 \textit{ et } Z_0 \textit{ sont dans le centre.}$$

Le centre de $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$ est la E-algèbre engendrée par $\{Z_0, T_0^{\pm 2}, T_0 S_0 + (S_0 + 1 - q)T_0\}$.

4.3.3

Lemme 27 *(Vignéras, 1998, II.6, II.8) Soit $a = diag(1, 1, \pi^{-1})$. C'est un élément du centre de L. L'élément T_{a,χ_0} est inversible dans $\mathcal{H}_E(G, \chi_0)$ d'inverse $q^{-2} T_{a^{-1}, \chi_0}$. De plus, pour tout $m' \in L$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = a^k m' \in L^+$. L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{H}_E(L, \chi_{0L}) &\longrightarrow \mathcal{H}_E(G, \chi_0) \\ T_{m', \chi_{0L}} &\longmapsto T_{a,\chi_0}^{-k} T_{m, \chi_0} \end{aligned}$$

est bien définie. C'est un isomorphisme d'algèbres qui vérifie $\mathcal{F}(T_{m', \chi_{0L}}) = q^{-2k} c(m, k) T_{m', \chi_0}$ où $c(m, k)$ désigne l'indice $[I^- \cap (m'^{-1} I^- m') : m^{-1} I^- m]$.

Calcul de c(m,k) : Soient $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $-k \leq min(x, y)$. Pour $m = a^k m' = diag(\pi^x, \pi^y, \pi^{-k}) \in L^+$ ou bien $m = a^k m' = s_1 diag(\pi^x, \pi^y, \pi^{-k}) \in L^+$, on a les isomorphismes compatibles suivants :

$$m^{-1} I^- m \simeq \pi^{1+k+x} O_F \times \pi^{1+k+y} O_F, \quad m'^{-1} I^- m' \cap I^- \simeq \pi^{1+max(0,x)} O_F \times \pi^{1+max(0,y)} O_F.$$

Ainsi, $c(m, k) = q^{2k+x+y-max(0,x)-max(0,y)}$.

4.3.4 D'après les paragraphes précédents, la E-algèbre $\mathcal{H}_E(G,\chi_0)$ est engendrée par

$$\mathcal{F}(T_0)=T_{t_0,\chi_0},\ \ \mathcal{F}(T_0^{-1})=q^{-1}T_{t_0^{-1},\chi_0},\ \mathcal{F}(S_0)=T_{s_1,\chi_0},\ \ \mathcal{F}(Z_0^{\pm 1})=T_{z^{\pm 1},\chi_0}$$

avec les relations : $(\mathcal{F}(S_0)+1)(\mathcal{F}(S_0)-q)=0$, $\mathcal{F}(T_0^2)$ et $\mathcal{F}(Z_0)$ appartiennent au centre.

Le centre de $\mathcal{H}_E(G,\chi_0)$ est la E-algèbre engendrée par

$$\{\mathcal{F}(Z_0)^{\pm 1},\mathcal{F}(T_0)^{\pm 2},\mathcal{F}(T_0S_0+(S_0+1-q)T_0)\}.$$

4.3.5

Lemme 28 *La O_E-algèbre $\mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)$ est isomorphe à la sous-O_E-algèbre de $\mathcal{H}_E(G,\chi_0)$ engendrée par $\{\mathcal{F}(Z_0^{\pm 1}),\, \mathcal{F}(S_0),\, \mathcal{T}(T_0),\, \mathcal{F}(qT_0^{-1})\}$:*

$$\mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)\simeq \mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}])$$

Preuve D'après le paragraphe précédent, les images par $\mathcal{F}$ des éléments $Z_0^{\pm 1}$, S_0, T_0, qT_0^{-1} sont bien des éléments de $\mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)$.

D'après les résultats de (Vignéras, 1998, II.6, II.8), le support de l'algèbre de Hecke de χ_0 est l'ensemble ILI. Une base de $\mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)$ est donc l'ensemble des $\{T_{g,\chi_0},\ g\in D\}$ où D est un système de représentants des doubles classes $I\backslash ILI/I$. On choisit

$$D=\begin{pmatrix}\pi^{\mathbb{Z}} & 0 & 0\\ 0 & \pi^{\mathbb{Z}} & 0\\ 0 & 0 & \pi^{\mathbb{Z}}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}0 & \pi^{\mathbb{Z}} & 0\\ \pi^{\mathbb{Z}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi^{\mathbb{Z}}\end{pmatrix}.$$

Nous voulons montrer que pour tout $g\in D$, l'élément $T_{g,\chi_0}\in\mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)$ appartient à $\mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}])$. Un tel $g\in D$ s'écrit $diag(\pi^x,\pi^y,\pi^k)$ ou bien $s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,\pi^k)$, avec $x,y,k\in\mathbb{Z}$. Puisqu'alors $T_{g,\chi_0}=\mathcal{F}(Z_0)^kT_{m,\chi_0}$ avec $m=diag(\pi^x,\pi^y,1)$ ou bien $m=s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,1)$, on peut se ramener au cas où $k=0$.

Montrons que T_{m,χ_0} est un élément de $\mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}])$ pour $m=diag(\pi^x,\pi^y,1)$ et $m=s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,1)$. D'après le paragraphe 4

$$T_{m,\chi_0}=\mathcal{F}(q^{max(0,x)+max(0,y)-x-y}T_{m,\chi_{0L}}).$$

Nous allons calculer $q^{max(0,x)+max(0,y)-x-y}T_{m,\chi_{0L}}$ afin de montrer qu'il appartient à la sous-O_E-algèbre de $\mathcal{H}_E(L,\chi_{0L})$ engendrée par $\{Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}\}$. Le lemme sera ainsi démontré.

Les lois de composition dans l'algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ (Vignéras, 2001, A.2), assurent que dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$ on a les relations

$$\forall k \in \mathbb{N}, (T_0S_0)^k = (T_{t_0s_1,\chi_{0L}})^k = T_{(t_0s_1)^k,\chi_{0L}}, \ \ (S_0T_0)^k = (T_{s_1t_0,\chi_{0L}})^k = T_{(s_1t_0)^k,\chi_{0L}}$$

De plus, T_0^2 appartient au centre de $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$.

On a ainsi les relations suivantes, pour $m = diag(\pi^x, \pi^y, 1)$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Si $\mathbf{x \leq y}$ alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2x}(T_0S_0)^{y-x}$. De plus, on a
- Cas $0 \leq x \leq y$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2x}(T_0S_0)^{y-x}$.
- Cas $x \leq 0 \leq y$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1}S_0)^{-x}(T_0S_0)^y$.
- Cas $x \leq y \leq 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1}S_0)^{y-x}(qT_0^{-1})^{-2y}$.

Si $\mathbf{x > y}$ alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y}(S_0T_0)^{x-y}$. De plus, on a
- Cas $0 \leq y \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y}(S_0T_0)^{x-y}$.
- Cas $y \leq 0 \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = (qS_0T_0^{-1})^{-y}(S_0T_0)^x$.
- Cas $y \leq x \leq 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = (qS_0T_0^{-1})^{x-y}(qT_0^{-1})^{-2x}$.

Soit $m = s_1\, diag(\pi^x, \pi^y, 1)$.

Si $\mathbf{x \leq y}$ $T_{m,\chi_{0L}} = S_0T_{diag(\pi^x,\pi^y,1),\chi_{0L}}$ et l'on est ramené à la discussion précédente.

Si $\mathbf{x > y}$ alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0T_{diag(\pi^{x-1},\pi^y,1),\chi_{0L}} = T_0^{2y+1}(S_0T_0)^{x-1-y}$.
- Cas $0 \leq y < x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y+1}(S_0T_0)^{x-1-y}$.
- Cas $y < 0 \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = qT_0^{-1}(qS_0T_0^{-1})^{-1-y}(S_0T_0)^x$.
- Cas $y < x < 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y}T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1})^{1-2x}(qS_0T_0^{-1})^{x-1-y}$.

□

On conclut la démonstration du lemme 28 en notant que $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi) = \mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0) \otimes_{O_E} \overline{\mathbb{F}}_p$, donc $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ est bien engendrée par $S, T, T^*, Z^{\pm 1}$. Les relations entre ces générateurs se déduisent des relations dans $\mathcal{H}_E(G, \chi_{0L})$ car $\mathcal{F}$ respecte le produit.

4.4 Démonstration du théorème 26.

Soit V un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module simple ayant un caractère central. Les éléments centraux Y, Y^*, Z, T^2, T^{*2} y agissent respectivement par multiplication par les scalaires y, y^*, z, t, t^* avec $z \neq 0$, $tt^* = 0$.

Nous allons noter $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{T}^*$ les endomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels induits par les actions respectives de S, T, T^* sur le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module V. On a $\tilde{S}(\tilde{S} + 1) = 0$.

(1) On suppose que $t \neq 0$. Alors $\tilde{T}$ est inversible. Or $TT^* = 0$, donc $\tilde{T}^* = 0$.
Si $Ker(\tilde{S} + 1) = \{0\}$, alors $\tilde{S} = 0$ et T agit comme Y sur V. Ainsi, T agit par multiplication par y, qui est non nul car $\tilde{T}$ est inversible. Soit $v \in V\backslash\{0\}$. Alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $M_1(y, z)$.

Si $Ker(\tilde{S}+1) \neq \{0\}$. Puisque $\tilde{S}\tilde{T}\tilde{S} = y\tilde{S}$, il existe $v \in V\backslash\{0\}$ tel que $Sv = -v$, $STv = yv$.

Si v et Tv sont liés, alors $y \neq 0$ et l'on vérifie que $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $\tilde{M}_1(y,z)$

Si $\{v, Tv\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p Tv$ est le module $M_2(y,t,z)$.

(2) Le cas $t \neq 0$ est symétrique du précédent. Il fournit deux caractères et un module de dimension 2 : le caractère $M_1^*(y^*,z)$, le caractère $\tilde{M}_1^*(y^*,z)$, le module $M_2^*(y^*,t^*,z)$.

(3) Maintenant $t = t^* = 0$.

Si $Ker(\tilde{S}+1) = \{0\}$, alors $\tilde{S} = \tilde{T} = \tilde{T}^* = 0$ et V est le caractère $P_1(z)$.

Si $Ker(\tilde{S}+1) \neq \{0\}$. Puisque $\tilde{S}\tilde{T}\tilde{S} = y\tilde{S}$, il existe $v \in V\backslash\{0\}$ tel que $Sv = -v$, $STv = yv$.

- Supposons que $T^*v = 0$.

  Si $\{v, Tv\}$ forme une famille liée, c'est que $Tv = 0$ car $t = 0$. Alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $\tilde{P}_1(z)$.

  Si $\{v, Tv\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p Tv$ est le module $N_2(y,0,z)$ avec $y \neq 0$.

- Supposons $T^*v \neq 0$.

  Si $\{T^*v, ST^*v\}$ forme une famille liée, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p T^*v$ est le caractère $P_1(z)$ ou $\tilde{P}_1(z)$ pour $z \neq 0$.

  Si $\{T^*v, ST^*v\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p T^*v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p ST^*v$ est le module $N_2(y,y^*,z)$ avec $(y,y^*) \neq (0,0)$.

5 Correspondance de Langlands numérique modulo p pour la pro-p-algèbre de Hecke

5.1 Représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F.

On note W_F le groupe de Weil de F. On y fixe un Frobenius géométrique. Pour $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\;*}$, on désigne par $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension 3 de W_F telles que le déterminant du Frobenius géométrique est égal à z.

Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et F_i l'extension non ramifiée de degré i de F. Soient W_{F_i} le groupe de Weil de F_i et I_{F_i} le sous-groupe d'inertie. On fixe un isomorphisme $v_i : W_{F_i}/I_{F_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Pour $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\;*}$, on désigne par $\nu_{i,z}$ le caractère non ramifié de W_{F_i} défini par $\nu_{i,z}(w) = z^{v_i(w)},\ \forall w \in W_{F_i}$.

Un caractère $W_{F_3} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\;*}$ est modérément ramifié et s'identifie par la théorie du corps de classes à un produit $\alpha\,\nu_{3,z}$ avec $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\;*}$, $\alpha : \mathbb{F}_{q^3}^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\;*}$. Pour un tel couple (z,α) on note $\sigma(z,\alpha)$ la représentation de W_F

$$\sigma(z,\alpha) = ind_{W_{F_3}}^{W_F}\,\alpha\,\nu_{3,z}.$$

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des orbites sous l'action du groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères réguliers de $\mathbb{F}^*_{q^3}$. L'application suivante est bien définie,

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\longrightarrow Irr^{z}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F) \\ \bar{\alpha} &\longmapsto \quad \sigma(z,\alpha) \end{aligned} \tag{7}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'orbite du caractère α sous l'action du groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$. C'est une bijection d'après (Vignéras, 1996, 1.13). D'où,

$$Card(Irr^{z}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)) = (q+1)q(q-1)/3.$$

Action par torsion par un caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}^*_p$.

On note $\mu : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ le caractère obtenu par inflation de la réduction $O^*_F \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ et en choisissant $\mu(\pi) = 1$. C'est le caractère fondamental de F^*. On pourra aussi considérer μ comme un caractère de $O^*_F/1+\pi O_F \simeq \mathbb{F}^*_q$. On note μ_3 le caractère fondamental de F_3.

Tout caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}^*_p$ s'identifie à un produit $\mu^l \nu_{z_0}$, pour $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et $z_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. L'inflation par la norme $F^*_3 \to F^*$ du caractère χ_0 est le caractère $\mu_3^{l(1+q+q^2)}\nu_{3,z_0^3}$. Ainsi, la torsion par le caractère χ_0 de la représentation $\sigma(z,\alpha)$ s'écrit :

$$\chi_0.\sigma(z,\alpha) = \sigma(zz_0^3,\ \alpha\mu_3^{l(1+q+q^2)}) \ \in \ Irr^{zz_0^3}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F).$$

Lemme 29 *Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. L'action de $\{\mu^l,\ l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ partitionne $Irr^{z}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ en :*
- *$(q+1)q/3$ orbites de cardinal $q-1$ si $q \neq 1 \, mod \, 3$.*
- *$3m(m+1)$ orbites de cardinal $q-1$ et de 2 orbites de cardinal m si $q = 1+3m$.*

Preuve Soit ζ un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}^*_{q^3}$. Un caractère de $\mathbb{F}^*_{q^3}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ est déterminé par l'image ζ^k de ζ, où $k \in \mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}$. Ce caractère est régulier si son orbite sous l'action du groupe de Galois possède 3 éléments, c'est-à-dire si les éléments $\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}$ sont distincts.

Ainsi, d'après (7), l'ensemble $Irr^{z}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ est paramétré par les triplets non ordonnés $\{\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}\}_{k\in\mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}}$ constitués d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{F}^*_{q^3}$, ou encore par l'ensemble $\mathcal{P}_q$ des polynômes unitaires de degré 3 irréductibles sur $\mathbb{F}_q$: soit $k \in \mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}$, l'élément P_k de $\mathcal{P}_q$ correspondant au triplet $\{\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}\}$ est le polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$,

$$P_k = (X-\zeta^k)(X-\zeta^{qk})(X-\zeta^{q^2k}) = X^3 + a_kX^2 + b_kX + c_k \in \mathbb{F}_q[X].$$

L'action de $\{\mu^l,\ l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ sur $Irr^{z}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ se traduit alors par l'action de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{P}_q$ suivante : pour $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, $P_k \in \mathcal{P}_q$,

$$l.P_k = (X-\zeta^{k+l(1+q+q^2)})(X-\zeta^{qk+l(1+q+q^2)})(X-\zeta^{q^2k+l(1+q+q^2)}) = \zeta^{3l(1+q+q^2)}P(\zeta^{-l(1+q+q^2)}X).$$

Nous voulons identifier les polynômes de $\mathcal{P}_q$ ayant un stabilisateur non trivial sous l'action de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Soit $P_k = X^3 + a_k X^2 + b_k X + c_k \in \mathcal{P}_q$ et $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ tel que $l.P_k = P_k$. En observant le terme constant de ce polynôme, on a $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$.

- Si $q \neq 1 \, mod \, 3$, alors $q-1$ et $1+q+q^2$ sont premiers entre eux et $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$ implique que $l = 0$ donc P_k a un stabilisateur trivial et une orbite de cardinal $q-1$.
- Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $q = 3m+1$, et m et $(1+q+q^2)/3$ sont premiers entre eux. Alors $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$ implique que $l \in m(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ainsi, si P_k a un stabilisateur non trivial, ce dernier est égal au sous-groupe de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ engendré par m. Or, $\zeta^{m(1+q+q^2)} \neq 1$ donc $a_k = 0$, de même $\zeta^{2m(1+q+q^2)} \neq 1$ donc $b_k = 0$ et P_k est de la forme $X^3 + c_k$.
  Puisque l'image de l'endomorphisme $x \mapsto x^3$ du groupe $\mathbb{F}_q^*$ est de cardinal $(q-1)/3$, il existe $2(q-1)/3$ polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ de la forme $X^3 + c$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_q$ contient deux 2 orbites de cardinal $(q-1)/3$: celle associée au polynôme $P_{\frac{1+q+q^2}{3}} = X^3 - \zeta^{1+q+q^2}$, et celle associée à $P_{\frac{2(1+q+q^2)}{3}} = X^3 - \zeta^{2(1+q+q^2)}$. Les autres orbites sont de cardinal $q-1$. $\square$

5.2 $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples supersinguliers.

Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. On note $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples supersinguliers tels que l'uniformisante agit par multiplication par z. (On entend par là que l'élément central $T^{(1)}_{\omega^3}$ correspondant à la double classe $I(1)\omega^3$ agit par multiplication par z.)

Soit Γ l'ensemble des $\mathfrak{S}_3$-orbites dans $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$. Il est de cardinal $(q+1)q(q-1)/6$. A une orbite γ, nous avons associé deux éléments (M, γ) de $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$. Par conséquent,

$$Card(SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))) = (q+1)q(q-1)/3.$$

Remarque 14 La notation (M, γ) signifie que M est un module simple supersingulier pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de la représentation σ_γ. Nous avons vu par la proposition 2, que si γ et γ' ont le même cardinal, alors les $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de Hecke de σ_γ et $\sigma_{\gamma'}$ sont isomorphes, de sorte que M a une structure de module simple supersingulier pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de $\sigma_{\gamma'}$. Ainsi, l'ensemble $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$ contient aussi (M, γ').

Action par torsion par un caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$.

On définit l'action des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de F^* sur les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules de façon à ce qu'elle soit compatible avec l'action par produit tensoriel sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G.

En particulier, pour $(M, \gamma) \in SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$, la torsion de (M, γ) par $\chi_0 = \mu^l \nu_{z_0}$ est donnée par :

$$\chi_0.(M, \gamma) = (\nu_{z_0}.M,\ \mu^l.\gamma) \ \in \ SS_{zz_0^3}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$$

où γ (resp. $\mu^l.\gamma$) est l'orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ du caractère $\chi : \mathbb{F}_q^{*3} \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$ (resp $\mu^l\,\chi$), et ν_{z_0} agit sur M en multipliant l'action de l'uniformisante par z_0^3.

Remarquons que Γ est paramétré par l'ensemble des triplets non-ordonnés $\{i,j,k\}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et que l'action de $\{\mu^l,\, l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ sur Γ se traduit par l'action suivante de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ sur les triplets :

$$\forall\, i,j,k,l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}, \quad l.\{i,j,k\} = \{i+l, j+l, k+l\}.$$

Cette description permet d'établir le lemme suivant.

Lemme 30 *L'action de $\{\mu^l,\, l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ partitionne Γ en :*
- $(q+1)q/6$ *orbites de cardinal* $q-1$ *si* $q \neq 1 \, mod \, 3$.
- $3m(m+1)/2$ *orbites de cardinal* $q-1$ *et de* 1 *orbite de cardinal* m *si* $q = 1+3m$. *L'orbite de cardinal* m *est celle associée au caractère* $\chi = \chi_1 \otimes \chi_1^2 \otimes \chi_1^3 : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}_p}^*$ *avec* $\chi_1(x) = x^m \ \forall x \in \mathbb{F}_q^*$.

Correspondance de Langlands numérique pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$.

Soit $z \in \overline{\mathbb{F}_p}^*$. D'après ce qui précède, l'action du caractère fondamental de F^* partitionne $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ d'une part et $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$ d'autre part, en :

- $(q+1)q/3$ orbites de cardinal $q-1$ si $q \neq 1 \, mod \, 3$.
- $3m(m+1)$ orbites de cardinal $q-1$ et de 2 orbites de cardinal m si $q = 1+3m$.

On peut donc trouver une bijection $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))) \simeq Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ qui soit compatible avec l'action du caractère fondamental μ de F^*.

Théorème 31 *Il existe une bijection compatible avec la torsion par le caractère fondamental de* F^* *entre*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de* $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$*-modules simples supersinguliers tels que l'uniformisante agit par multiplication par* z *d'une part,*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de* $\overline{\mathbb{F}}_p$*- représentations irréductibles de dimension* 3 *du groupe de Weil de* F*, avec le déterminant du Frobenius égal à* z*, d'autre part.*

Références

Barthel, L. ; Livné, R. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. 75, no. 2, 261-292 (1994).

Barthel, L. ; Livné, R. Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory 55 (1995).

Breuil, Christophe Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compositio Math. 138, no. 2, 165–188 (2003).

Bruhat, F. ; Tits, J. Groupes réductifs sur un corps local. Inst. Hautes Études Sci. Publ Math. No. 41 5-251, (1972).

Cabanes, M. ; Enguehard, M. Representation theory of finite reductive groups. New Mathematical Monographs, 1. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

Iwahori, N, Matsumoto, H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 25, 5-48 (1965).

Lusztig, G. Affine Hecke algebras and their graded version. Journal of A.M.S. Vol. 2, No.3 (1989).

Ollivier, R. Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p.

Rogawski, J.D. On modules over the Hecke algebra of a p-adic group. Invent. Math 79, 443-465 (1985).

Rogawski, J.D. Representations of GL(n) over a p-adic field with an Iwahori-fixed vector Isr. J. Math 54, 242-256 (1986).

Vignéras, M.-F. Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$. Progress in Mathematics, 137. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).

Vignéras, M.-F. A propos d'une conjecture de Langlands modulaire. Finite reductive groups : related structures and representations. Proceedings of an international conference, Luminy, France, 1994. Boston, MA : Birkhäuser. Prog. Math. 141, 415-452 (1996).

Vignéras, M.-F. Induced representations of reductive p-adic groups in characteristic $\ell \neq p$. Preprint MPI 1996. Selecta Mathematica 4 549-623 (1998).

Vignéras, M.-F. Representations of the p-adic group GL(2,F) modulo p. Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint 30 (2001). Compositio Mathematica. A paraître.

Vignéras, M.-F. Algèbres de Hecke affines génériques. ArXiv math.RT/0301058 (2002).

Vignéras, M.-F. Pro-p-Iwahori Hecke algebra and supersingular representations. Institut de Mathématiques de Jussieu. Preprint (2003). A paraître.